调制不稳定性与非线性波的可控激发

杨战营 赵立臣 刘冲

2021. 7. 23

School of Physics, Northwest University

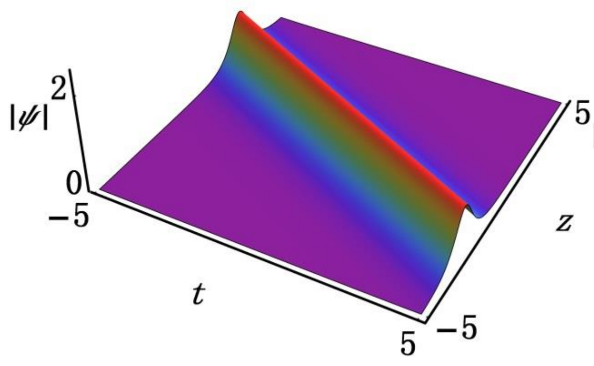
目录

- 非线性局域波简介
- 调制不稳定性与多种局域波之间的关系
- 高阶效应诱发的局域波态转换
- 基本局域波的观测相图
- 非线性波的可控激发

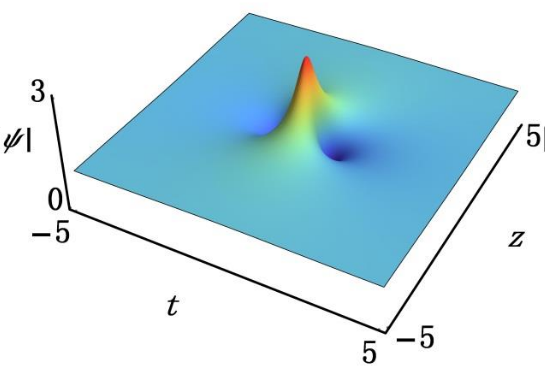
1. 非线性局域波简介

非线性局域波是指非线性物理系统中具有特定动力学性质的激发元。依照其性质不同，常见的局域波可分为：孤子、怪波、呼吸子三类。

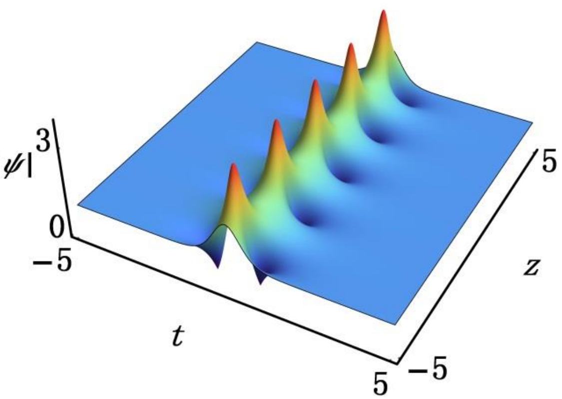
孤子



怪波



呼吸子



1. 非线性局域波简介

1.1 孤子简介

- 历史渊源
- 基本特征
- 孤子分类

1. 非线性局域波简介

孤子的历史渊源

孤子这个名词首先是在物理的流体力学中提出来的。1834年，英国科学家罗素观察到这样一个现象：在一条窄河道中，迅速拉一条船前进，在船突然停下时，在船头形成的一个孤立的水波迅速离开船头，以每小时14～15km的速度前进，而波的形状不变，前进了2～3km才消失。他称这个波为孤立波。但限于当时的数学理论和科学水平，人们没有从理论上给予这种现象一个很好的解释。

1995年7月，人们为纪念罗素，在河道复现了罗素当年观测的孤子

1. 非线性局域波简介

孤子的历史渊源

1895年 Korteweg和de Vries研究浅水波的运动，在长波近似和小振幅的假定下，得到了单向运动的浅水波运动方程，即著名的KdV方程。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{2}{3}\alpha\eta\right) + \frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

$\eta(x,t)$ 波峰高度

x 水面上沿波传播方向上的坐标　　t 时间

l 静水深度　　g 重力加速度

σ 与液体的特性（密度、表面张力等）有关的常数

α 与液体均匀运动有关的常数

通过对此模型的研究，他们得到了与Russell所发现的孤立波现象一致的、具有形状不变的孤立波解

$$u(x,t) = \frac{c}{2}\mathrm{sech}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct + x_0)\right].$$

1. 非线性局域波简介

孤子的历史渊源

1965年美国科学家Zabusky等人用数值模拟法详细地考察了等离子体中孤立波相互间的非线性碰撞过程。计算表明，两个孤立波碰撞后仍以它们碰撞前的同一速度和形状离开。他们根据孤立波具有类似于粒子碰撞后形状不变的性质，将其称为孤立子，简称孤子。

VOLUME 15, NUMBER 6 PHYSICAL REVIEW LETTERS 9 AUGUST 1965

INTERACTION OF "SOLITONS" IN A COLLISIONLESS PLASMA AND THE RECURRENCE OF INITIAL STATES

N. J. Zabusky

Bell Telephone Laboratories, Whippany, New Jersey

and

M. D. Kruskal

Princeton University Plasma Physics Laboratory, Princeton, New Jersey

(Received 3 May 1965)

1. 非线性局域波简介

孤子的历史渊源

Featured in Physics | PRL Milestone | Free to Read

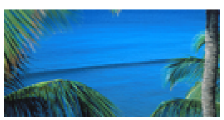
Interaction of "Solitons" in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States

N. J. Zabusky and M. D. Kruskal
Phys. Rev. Lett. **15**, 240 – Published 9 August 1965

Physics See Focus story: *Landmarks*—Computer Simulations Led to Discovery of Solitons

An article within the collection: Letters from the Past - A PRL Retrospective

Physics FOCUS



Landmarks—Computer Simulations Led to Discovery of Solitons

Published 8 February 2013

The 1965 discovery of the isolated waves known as solitons—which appear in many physical systems—was a direct result of the new computer technology available for numerical simulations.

APS作评述：该计算模拟工作导致了孤子的发现。

50 years PRL moving physics forward

Letters from the Past - A PRL Retrospective

2008 marked PRL's 50th anniversary. As part of the celebrations a collection of milestone Letters was started. The collection contains Letters that have made long-lived contributions to physics, either b announcing significant discoveries, or by initiating new areas of research.

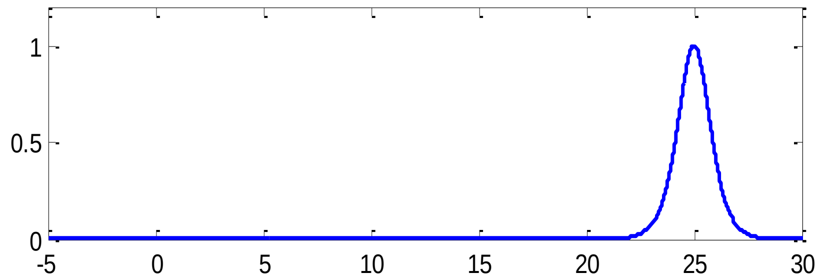
该工作也被选为PRL50周年的里程碑工作。

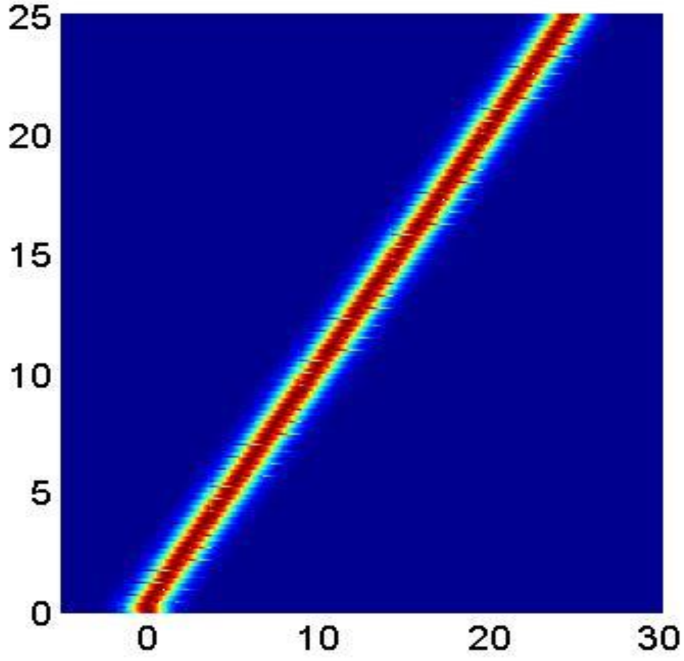
1. 非线性局域波简介

孤子的基本特征

孤子是线性色散（或衍射）与非线性效应平衡的结果。孤子三大特征：稳定性、粒子性、波动性。

稳定性：孤子的能量集中在空间有限区域。不会随时间的增加而扩散到无限区域中去，意味着孤子可以保持初始状态进行长时/长距离传输。



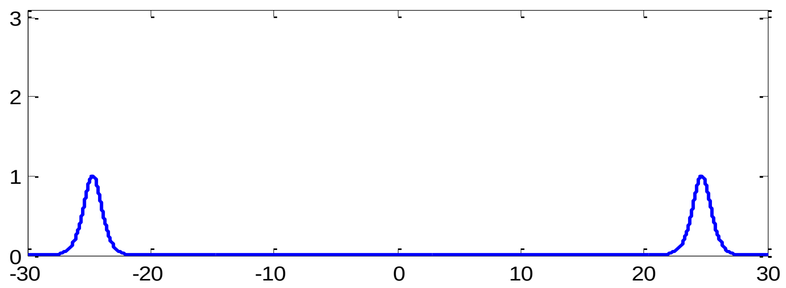


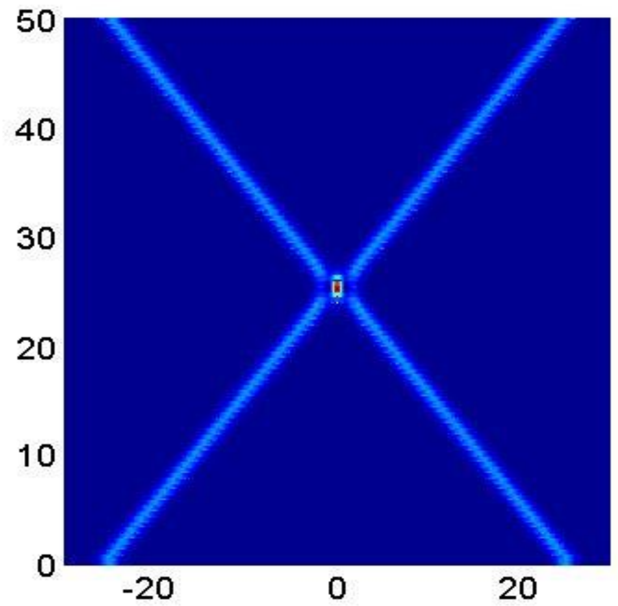
1. 非线性局域波简介

孤子的基本特征

孤子三大特征：稳定性、粒子性、波动性。

粒子性：当两个孤子相碰时，它们以经典粒子一样的规律运动，碰撞后，各自保持自己原有的形状和速度继续运动（最多只有一个相移），同时也表明孤子的稳定性。



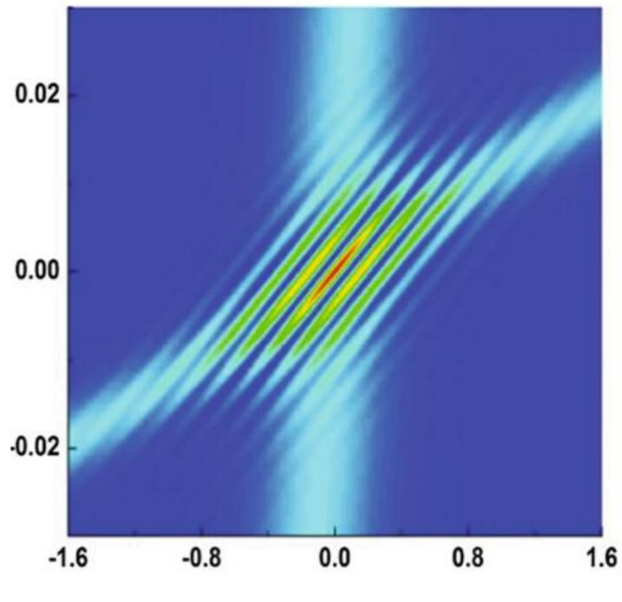


1. 非线性局域波简介

孤子的基本特征

孤子三大特征：稳定性、粒子性、波动性。

波动性：孤立子具有明显的波动性，即它是一个孤立的行波，同时，当孤子碰撞时在一定条件下会出现干涉图案



Li-Chen Zhao，Zhan-Ying Yang , et al.，Nonlinear Dynamics 12, 21–28 (2015).

1. 非线性局域波简介

孤子的分类

以（1+1）维非线性波动方程为例，孤子依照其结构性质的不同，大致可分为如下几类：

亮孤子（bright soliton）

暗孤子（dark soliton）

反暗孤子（antidark soliton）

W型孤子（W-shaped soliton）

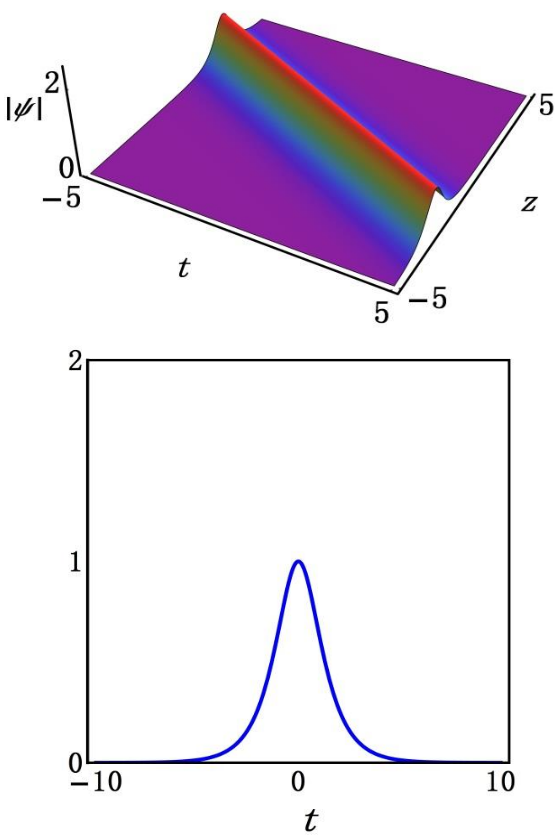
多峰孤子（multi-peak soliton）

....

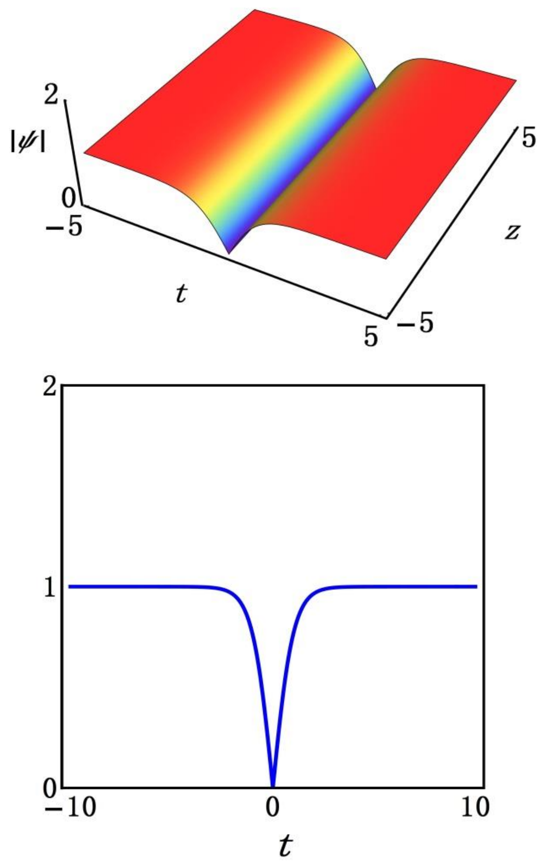
1. 非线性局域波简介

孤子的分类

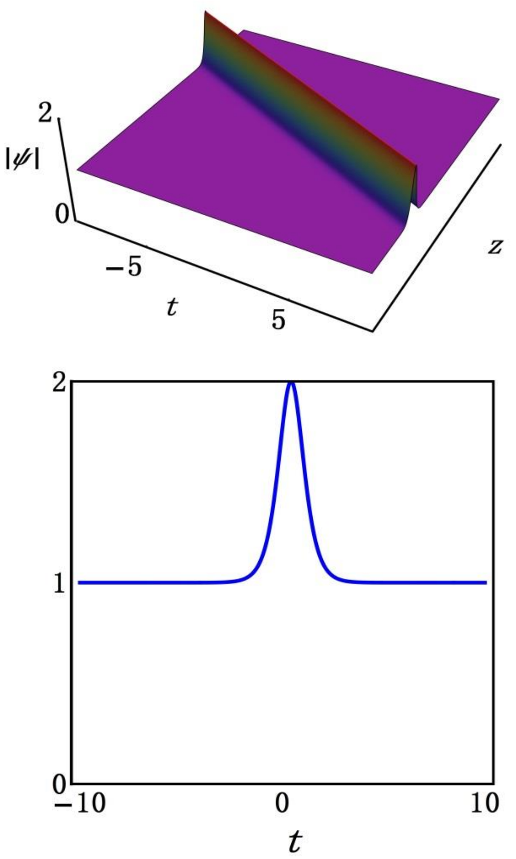
亮孤子



暗孤子



反暗孤子

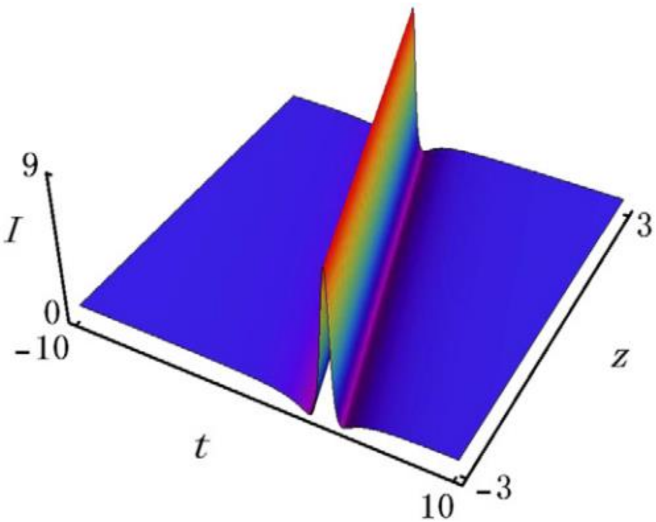


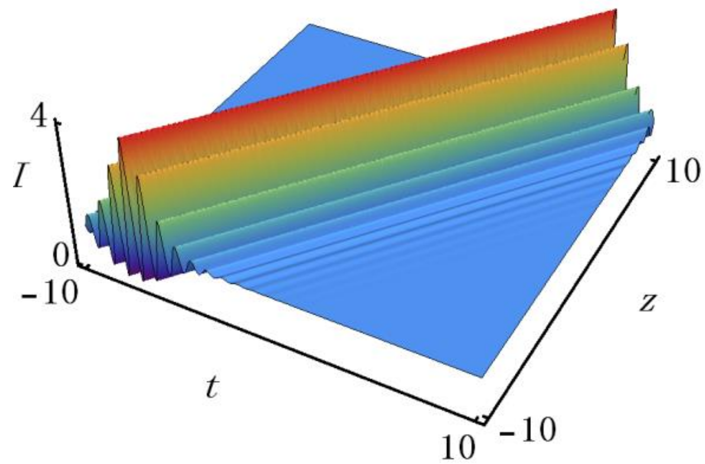
1. 非线性局域波简介

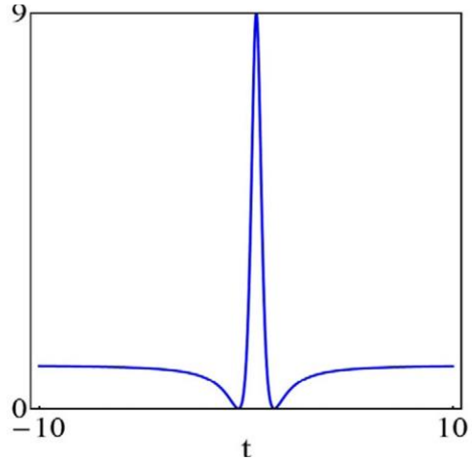
孤子的分类

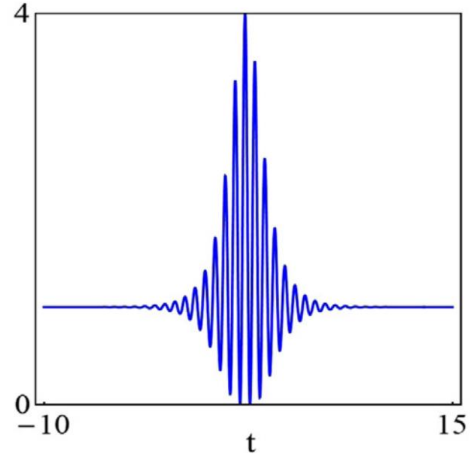
W形孤子

多峰孤子









1.2 怪波简介

- 历史渊源
- 基本特征
- 怪波分类
- 不同系统中的怪波

1. 非线性局域波简介

怪波的历史渊源

怪波（rogue wave），也称畸形波（freak wave）、巨波（monster wave）、杀人波（killer wave）、极端波（extreme wave），最初源于海洋中极端事件的报道，是一种具有高峰值且“来无影，去无踪”的奇异波，不具有演化稳定性。

Figure 1: The Great Wave of Kanagawa by the Japanese artist Katsushika Hokusai. The Great Wave is considered one the most famous of all Japanese prints.

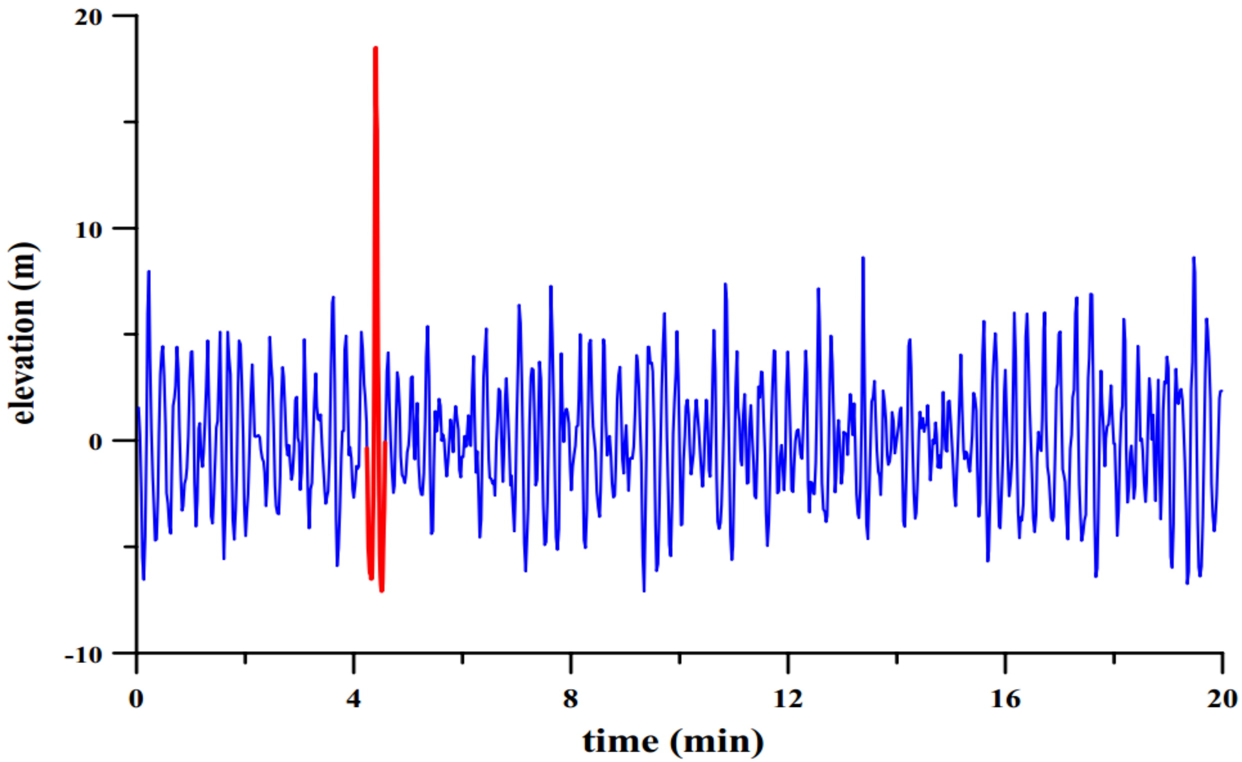
1. 非线性局域波简介

怪波的历史渊源

1. 非线性局域波简介

怪波的历史渊源

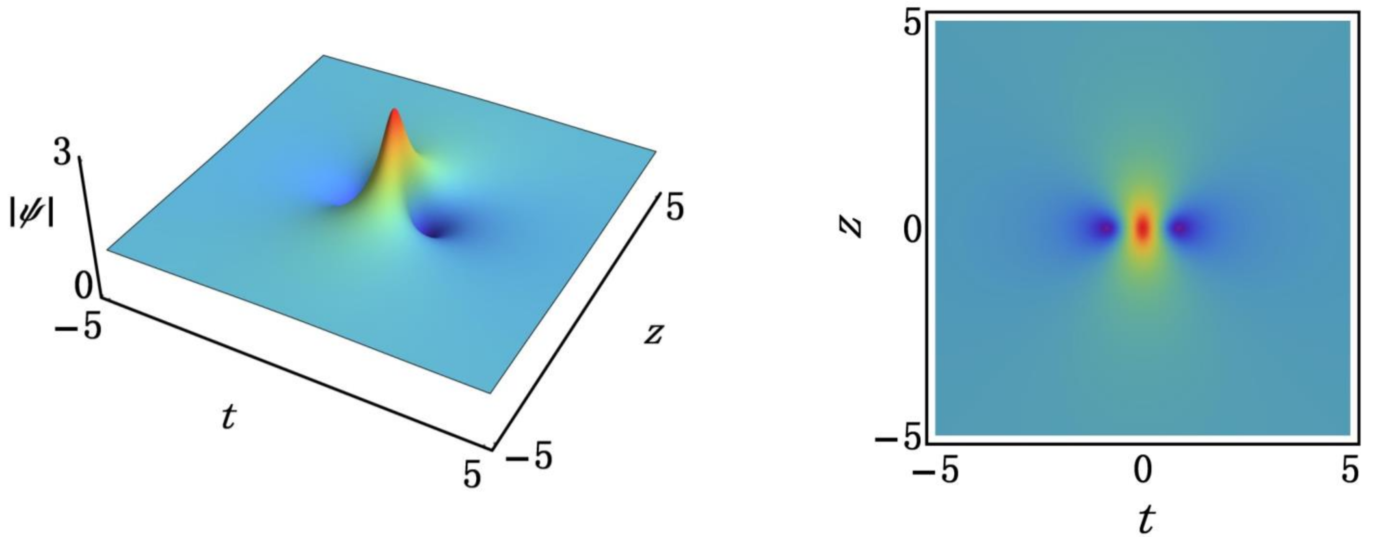
1995年，科学家们通过科学测量手段首次在北海的Draupner石油平台证明了探测到怪波信号，从而证实了怪波的存在性。该怪波即著名的新年波。



1. 非线性局域波简介

怪波的基本特征

1983年，D. H. Peregrine教授发现了一类时空双重局域的“单振幅波”。这个特殊的结构就是近期被人们广泛接受的描述“怪波现象”的最基本原型——“Peregrine怪波解”。

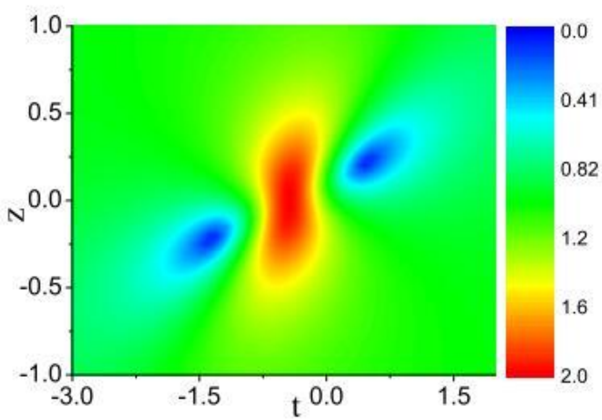


1）高峰值
2）来无影，去无踪

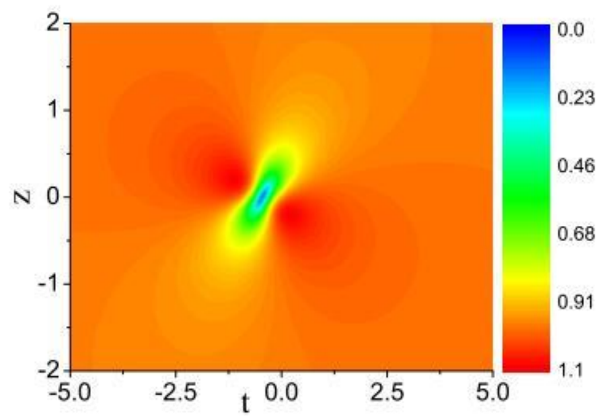
1. 非线性局域波简介

怪波的分类

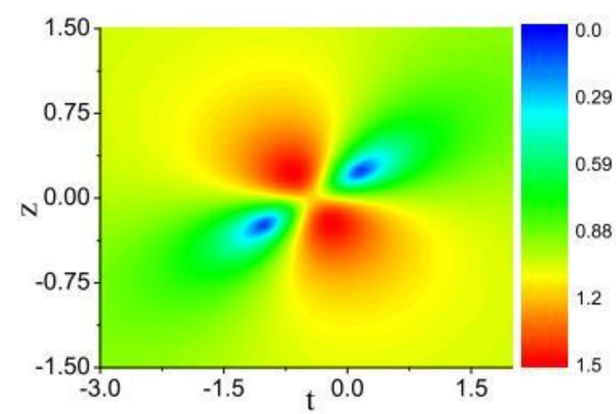
基本怪波的结构：



眼状结构



反眼状结构



四花瓣结构

(a) 眼状怪波：“一峰两谷”
(b) 反眼状怪波：“一谷两峰”
(c) 四花瓣怪波：“两峰两谷”

1. 非线性局域波简介

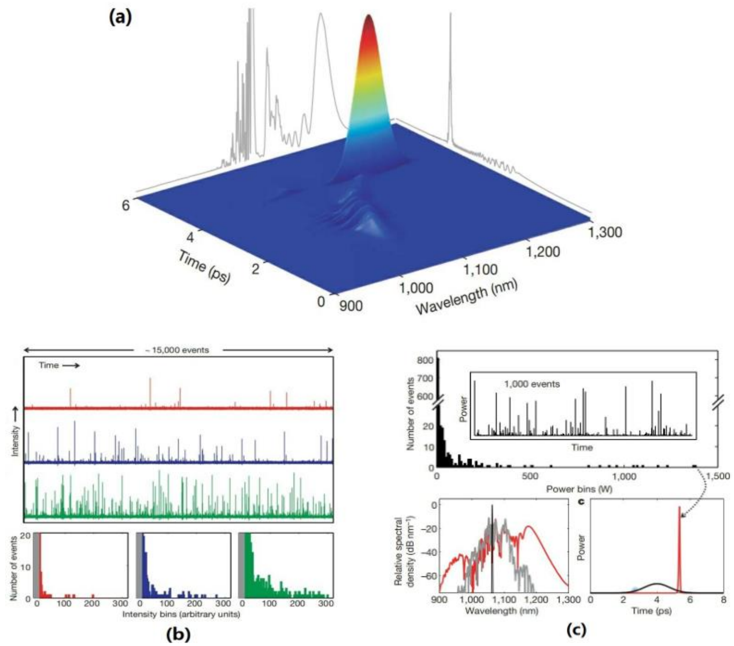
不同物理系统中的怪波：光纤系统


nature Vol 450|13 December 2007|doi:10.1038/nature06402

LETTERS

Optical rogue waves

D. R. Solli[1], C. Ropers[1,2], P. Koonath[1] & B. Jalali[1]



非线性光学中的怪波最早（2007年）由Solli小组在非线性光纤中实现。该现象满足怪波高峰值和不可预期性的基本特征(图a)。将此与海洋怪波类比，他们发现：1）该现象满足L型长尾分布（图b）且数值模拟与实验结果很好的吻合（图c）；2）该现象源于光脉冲传输的调制不稳定性。这两点与海洋怪波完全一致。

该论文开启了非线性光学中一个新的研究方向“非线性光怪波物理”。[见Nature Photonics, 2014, 8(10): 755]。

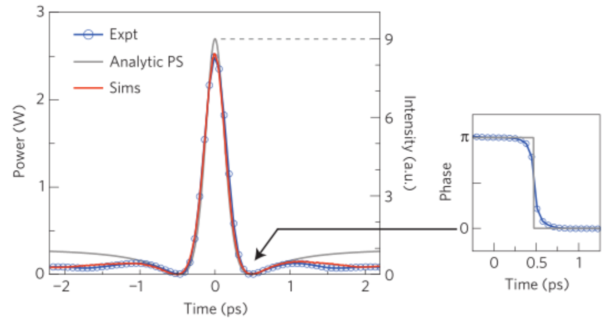
1. 非线性局域波简介

不同物理系统中的怪波：光纤系统

LETTERS
PUBLISHED ONLINE: 22 AUGUST 2010 | DOI:10.1038/NPHYS1740
nature physics

The Peregrine soliton in nonlinear fibre optics

B. Kibler[1], J. Fatome[1], C. Finot[1], G. Millot[1], F. Dias[2,3], G. Genty[4], N. Akhmediev[5] and J. M. Dudley[6]*



2010年Kibler等人（Nature physics）成功在光纤中验证了Peregrine怪波。它除了具有高幅度特性之外，也具有明显的眼状结构。且实验结果与精确结果完美吻合（时域和频域）。

nature photonics
REVIEW ARTICLE
PUBLISHED ONLINE: 28 SEPTEMBER 2014 | DOI: 10.1038/NPHOTON.2014.220

Instabilities, breathers and rogue waves in optics

John M. Dudley[1], Frédéric Dias[2], Miro Erkintalo[3] and Goëry Genty[4]*

将非线性光学中的光怪波研究命名为“光怪波物理”，并称之为非线性光学的前沿热点课题之一。

1. 非线性局域波简介

不同物理系统中的怪波：水流体

PRL **106,** 204502 (2011) PHYSICAL REVIEW LETTERS

Rogue Wave Observation in a Water Wave Tank

A. Chabchoub,[1,*] N. P. Hoffmann,[1] and N. Akhmediev[2]

PHYSICAL REVIEW E **86**, 016311 (2012)

Experimental study of spatiotemporally localized surface gravity water waves

A. Chabchoub,[1,*] N. Akhmediev,[2] and N. P. Hoffmann[1]

PHYSICAL REVIEW X **2**, 011015 (2012)

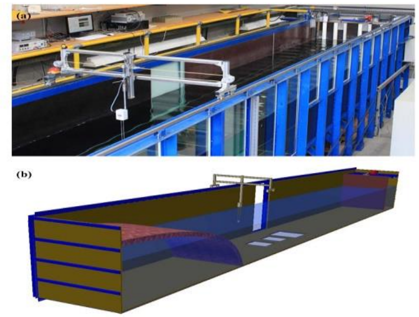
Super Rogue Waves: Observation of a Higher-Order Breather in Water Waves

A. Chabchoub,[1,*] N. Hoffmann,[1] M. Onorato,[2,3] and N. Akhmediev[4]

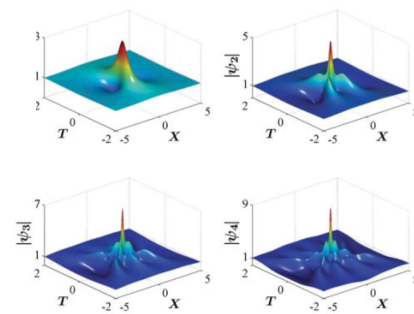
PHYSICAL REVIEW E **86**, 056601 (2012)

Observation of a hierarchy of up to fifth-order rogue waves in a water tank

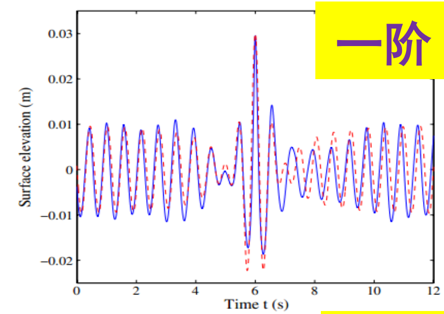
A. Chabchoub,[1,*] N. Hoffmann,[1] M. Onorato,[2,3] A. Slunyaev,[4] A. Sergeeva,[4] E. Pelinovsky,[4] and N. Akhmediev[5]



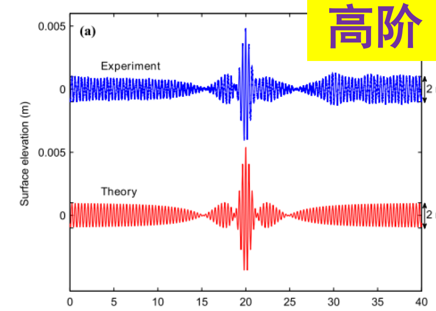
水箱实验



一阶



高阶



自2011年，A.Chabchoub等人在水箱中验证了Peregrine怪波解及其高阶形式。利用精确解获得局域波的初态激发，他们的实验结果与精确解完美吻合。

1. 非线性局域波简介

不同物理系统中的怪波：等离子体

PRL 107, 255005 (2011) PHYSICAL REVIEW LETTERS week ending 16 DECEMBER 2011

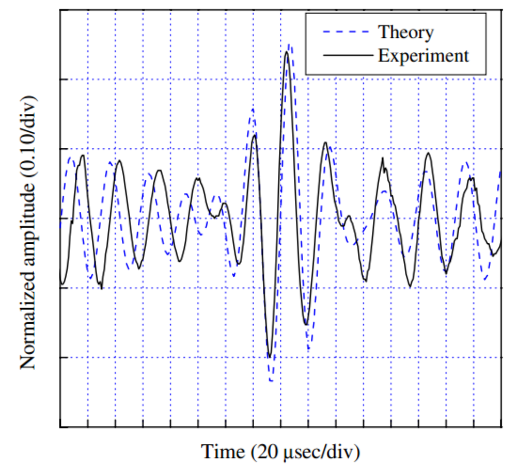
Observation of Peregrine Solitons in a Multicomponent Plasma with Negative Ions

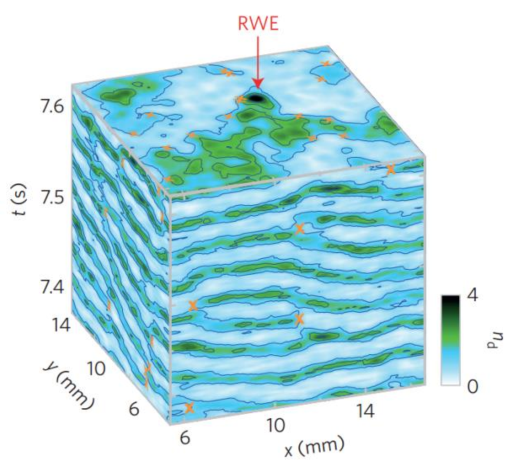
H. Bailung,[1] S. K. Sharma,[1] and Y. Nakamura[1,2]

[1]*Plasma Physics Laboratory, Physical Sciences Division, Institute of Advanced Study in Science and Technology, Paschim Boragaon, Guwahati-35, India*

[2]*On leave from Yokohama National University, Yokohama, Japan*

(Received 29 July 2011; published 16 December 2011)





nature physics

LETTERS

PUBLISHED ONLINE: 29 FEBRUARY 2016 | DOI: 10.1038/NPHYS3669

Generation of acoustic rogue waves in dusty plasmas through three-dimensional particle focusing by distorted waveforms

Ya-Yi Tsai, Jun-Yi Tsai and Lin I*

1. 非线性局域波简介

不同物理系统中的怪波：玻色-爱因斯坦凝聚体

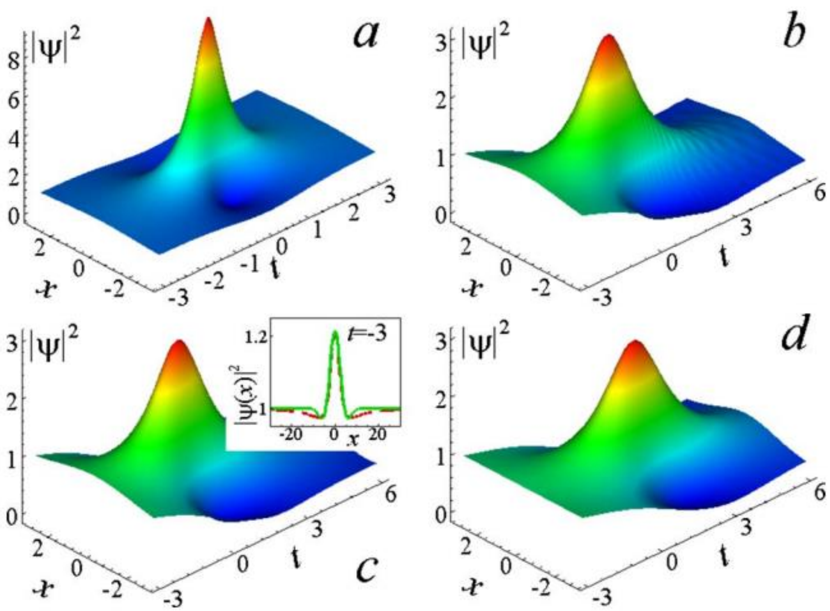
PHYSICAL REVIEW A **80**, 033610 (2009)

Matter rogue waves

Yu. V. Bludov,[1] V. V. Konotop,[2,3] and N. Akhmediev[4]

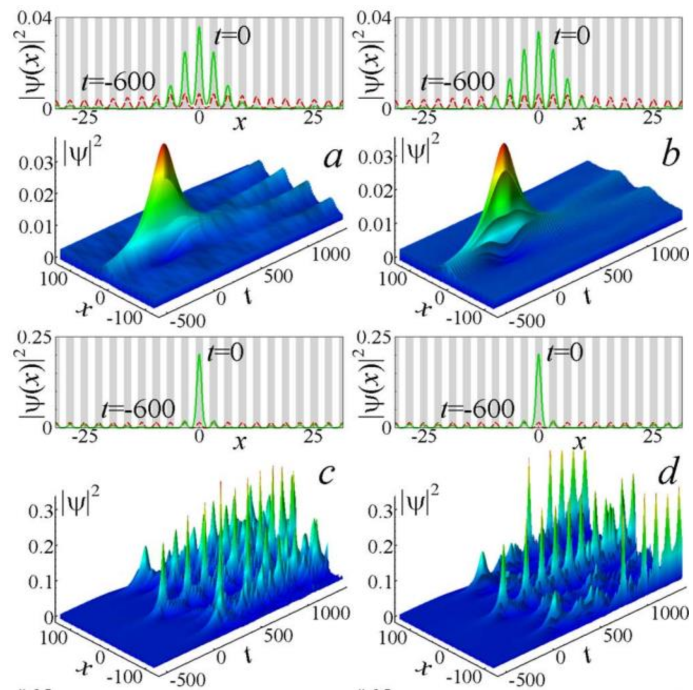
均匀BEC中物质怪波

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + \sigma|\psi|^2\psi - ig|\psi|^4\psi,$$



光格子中物质怪波

$$i\psi_t = -\psi_{xx} - V\cos(2x)\psi + \sigma|\psi|^2\psi - ig|\psi|^4\psi,$$



1. 非线性局域波简介

不同物理系统中的怪波：铁磁系统

Annals of Physics 327 (2012) 2085–2095

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

Annals of Physics

journal homepage: www.elsevier.com/locate/aop

ELSEVIER

Magnetic rogue wave in a perpendicular anisotropic ferromagnetic nanowire with spin-transfer torque

Fei Zhao [a], Zai-Dong Li [a,*], Qiu-Yan Li [a], Lin Wen [b], Guangsheng Fu [a], W.M. Liu [b]

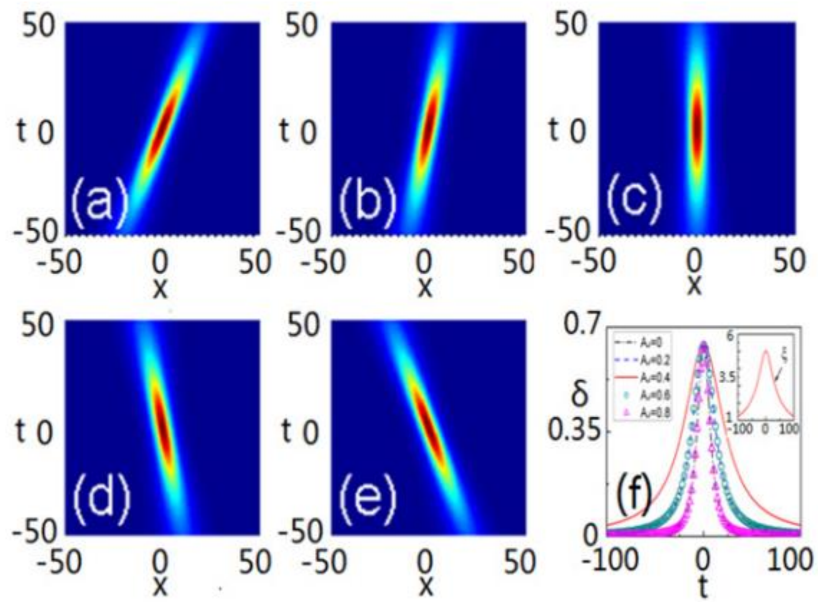
从Landau–Lifshitz方程出发，约化至NLSE

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\mathrm{eff}} + \frac{\alpha}{M_s}\mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \tau_s,$$

$$i\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{1}{2}q\,|q|^2 + iA_J\frac{\partial q}{\partial x} - \omega_0 q,$$

磁怪波精确解

$$Q_1 = A_c e^{i\varphi}\left[\frac{4\left(1 - itA_c^2\right)}{t^2A_c^2\eta + 2txA_c^2\zeta + \varepsilon} - 1\right],$$



1. 非线性局域波简介

不同物理系统中的怪波：金融系统

Commun. Theor. Phys. (Beijing, China) **54** (2010) pp. 947–949
Vol. 54, No. 5, November 15, 2010

Financial Rogue Waves*

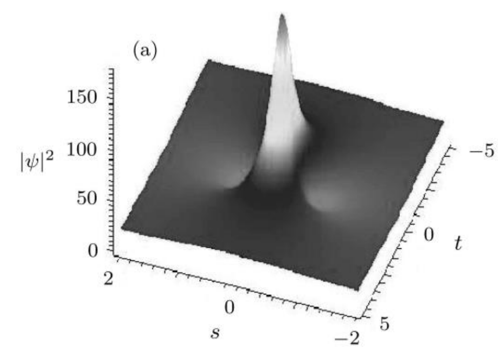
YAN Zhen-Ya (闫振亚)†
Key Laboratory of Mathematics Mechanization, Institute of Systems Science, AMSS, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China
(Received June 4, 2010)

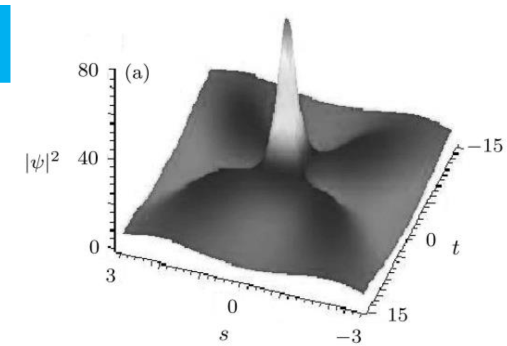
Ivancevic 期权定价模型（本质上为非线性薛定谔模型）

$$i\frac{\partial\psi(S,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma\frac{\partial^2\psi(S,t)}{\partial S^2} - \beta\left|\psi(S,t)\right|^2\psi(S,t)\,,$$

$\psi = \psi(S,t)$ **期权价格波函数**

σ **股价波动系数；** β **市场潜在需求量；** S **资产价格；**





金融怪波精确解

$$\psi_1(S,t) = \alpha\sqrt{\frac{\sigma}{2\beta}}\left[1 - \frac{4(1+i\sigma\alpha^2 t)}{1+2\alpha^2(S-\sigma k t)^2+\sigma^2\alpha^4 t^2}\right]$$

1.3 呼吸子简介

- 基本特征
- 呼吸子分类

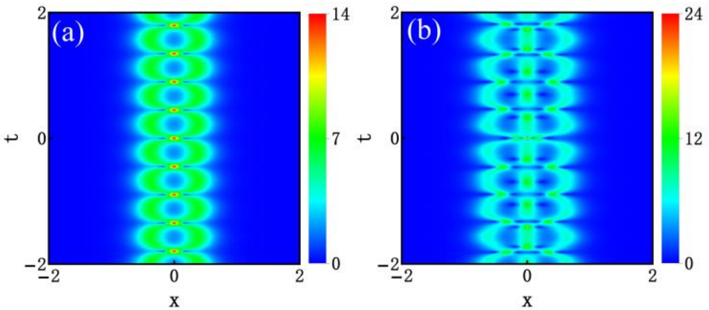
1. 非线性局域波简介

呼吸子的基本特征

呼吸子是一种重要的具有周期性压缩展开特性的非线性局域波。在(1+1)维情形下，呼吸子表现为在时空平面上沿任一方向周期性演化的局域波。

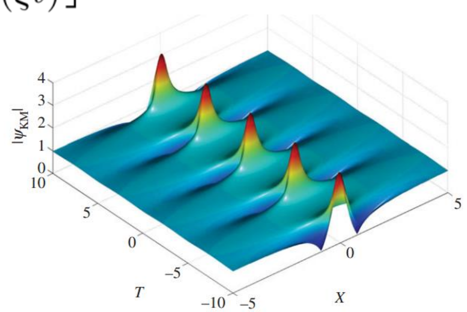
$$\psi = \frac{4i(w_2^2 - w_1^2)\left[w_1 e^{2iw_1^2 t}\cosh(2w_2 x) + w_2 e^{-2iw_2^2 t}\cosh(2w_1 x)\right]}{(w_1 - w_2)^2\cosh[2(w_1+w_2)x] + (w_1+w_2)^2\cosh[2(w_1-w_2)x] + 4w_1 w_2\cos[2(w_1^2 - w_2^2)t]}$$

零背景呼吸子是由多个速度和振幅相同的标准亮孤子非线性叠加而形成，也有人称此类呼吸子为“多孤子束缚态”。



$$\psi = \left[s - \frac{2(b^2 - s^2)\cos(\xi t) + i\xi\sin(\xi t)}{b\cosh(2x\sqrt{b^2 - s^2}) - s\cos(\xi t)}\right] e^{is^2 t}$$

非零背景呼吸子一般是指局域在平面波背景上的局域呼吸波结构，其产生机制为主要基于非线性系统调制不稳定性。



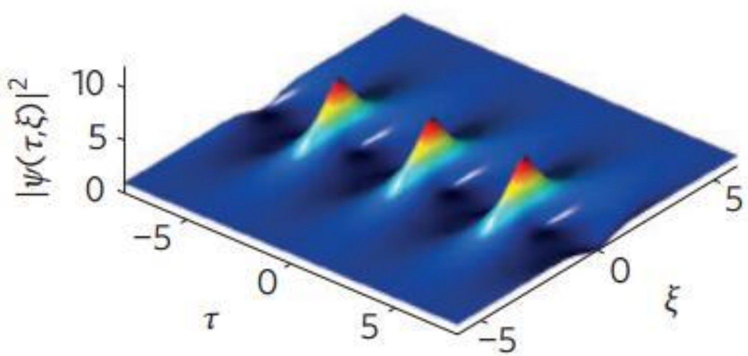
1. 非线性局域波简介

呼吸子的分类

平面波上呼吸子一般是指局域在平面波背景上的局域呼吸波结构，其产生机制为主要基于非线性系统调制不稳定性。呼吸子主要分为：

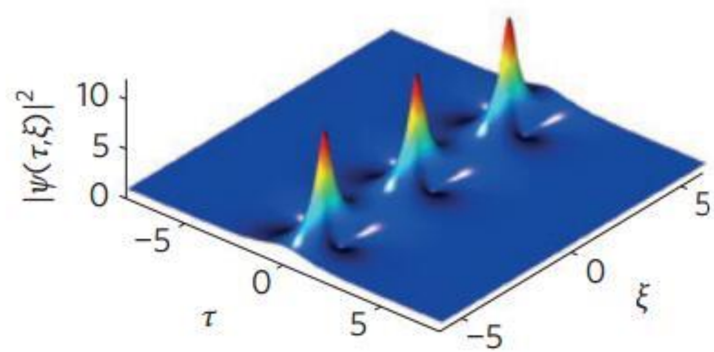
1）Kuznetsov-Ma 呼吸子；

2）Akhmediev 呼吸子。



Akhmediev 呼吸子

N. Akhmediev and V. I. Korneev, Theor. Math. Phys. 69, 1089-1093 (1986).

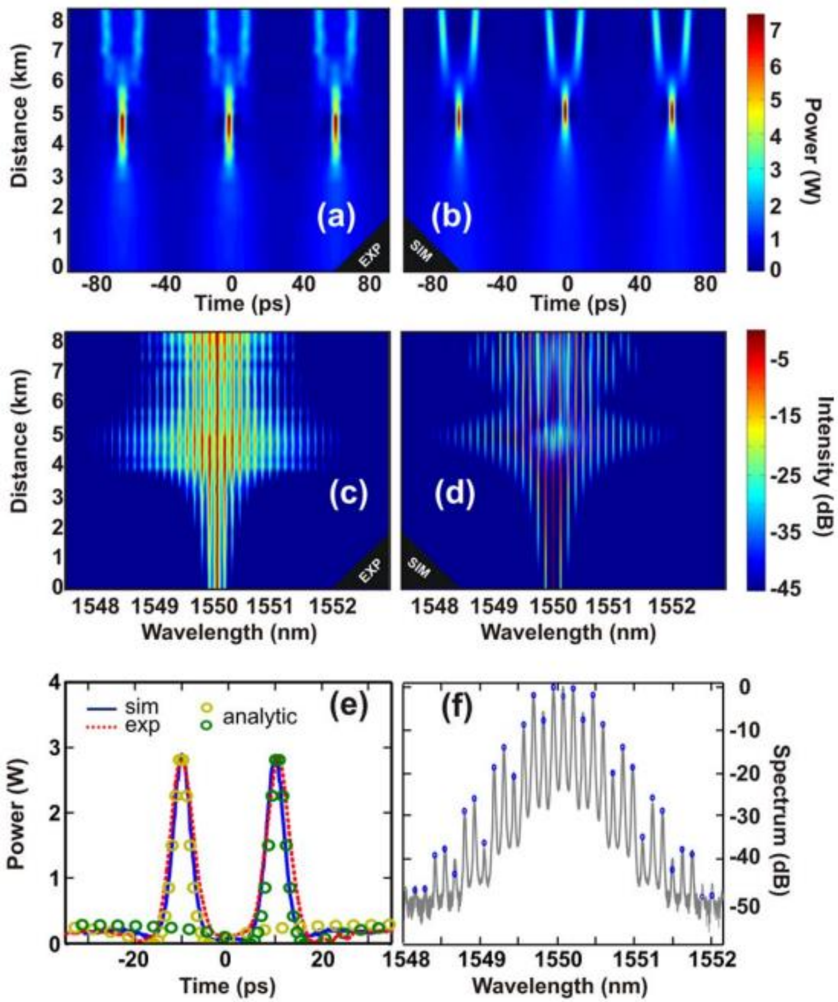


Kuznetsov-Ma 呼吸子

E. Kuznetsov, Sov. Phys. Dokl. 22, 507 (1977);Y. C. Ma, Stud. Appl. Math. 60, 43-58 (1979).

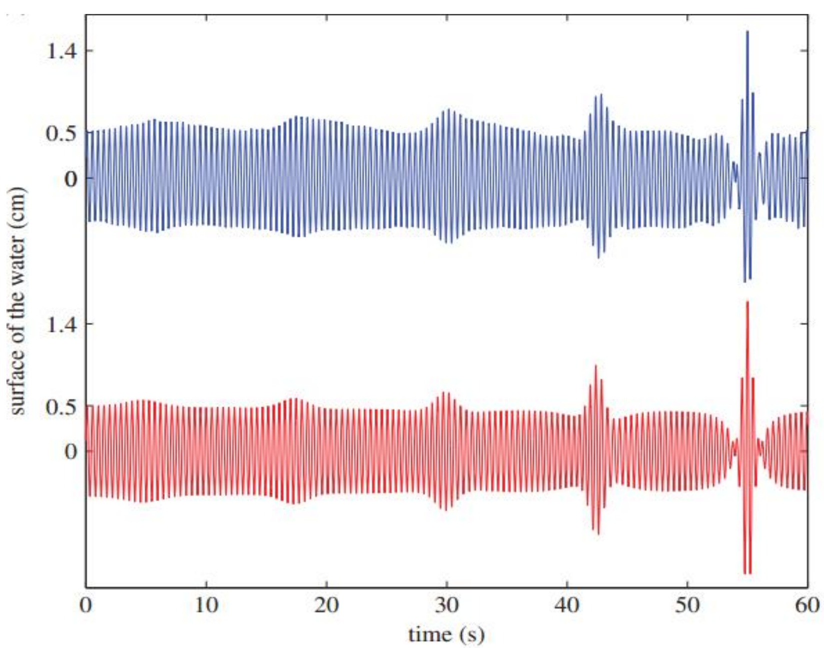
1. 非线性局域波简介

呼吸子的分类



Akhmediev 呼吸子的实验实现

2009年Dudley等人在光纤中验证了Akhmediev呼吸子(Opt. Express 17, 21497 (2009))；2014年Chabchoub等人在水箱中验证了Akhmediev呼吸(Phil.Trans.R.Soc.A 372:2014 0005.)



1. 非线性局域波简介

呼吸子的分类

Kuznetsov-Ma 呼吸子的实验实现

SCIENTIFIC REPORTS

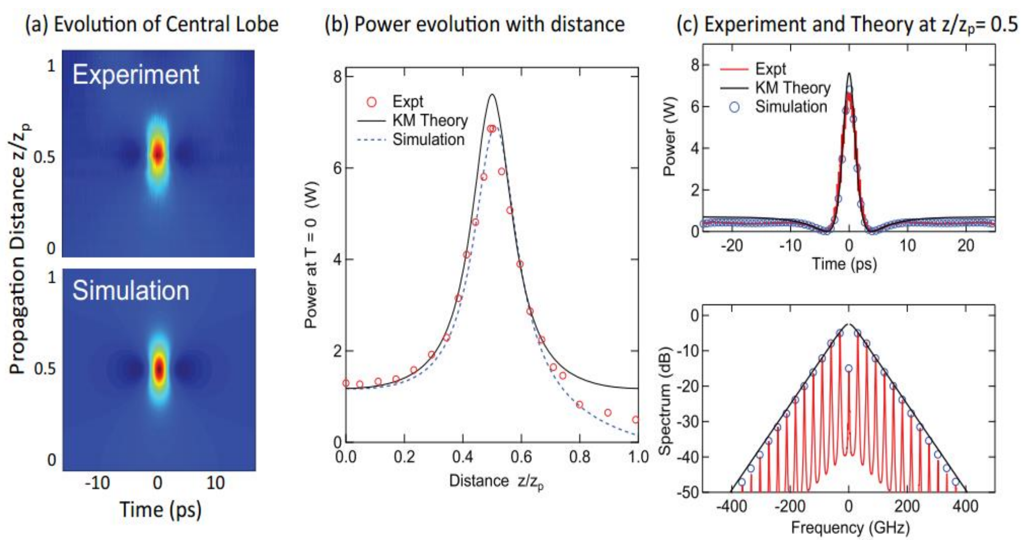
OPEN

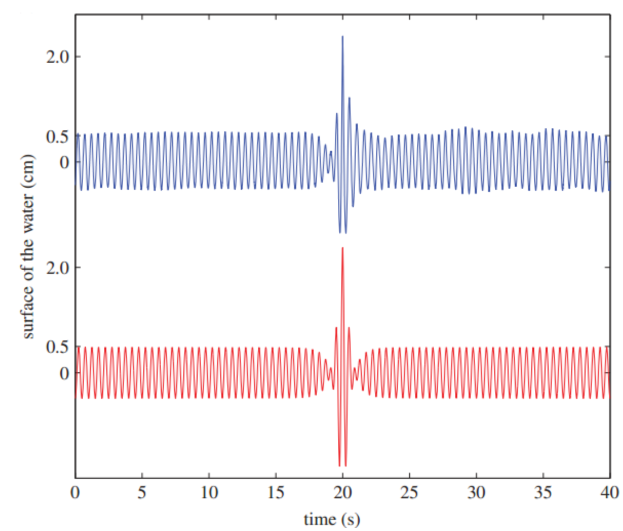
SUBJECT AREAS:
PHYSICS

Observation of Kuznetsov-Ma soliton dynamics in optical fibre

B. Kibler[1], J. Fatome[1], C. Finot[1], G. Millot[1], G. Genty[2], B. Wetzel[3], N. Akhmediev[4], F. Dias[5] & J. M. Dudley[3]

2012年Kibler等人在光纤中验证了K–M呼吸子(Sci.Rep. 2,463 (2012))；2014年Chabchoub等人在水箱中验证了K-M呼吸子(Phil.Trans.R.Soc.A 372:20140005.)



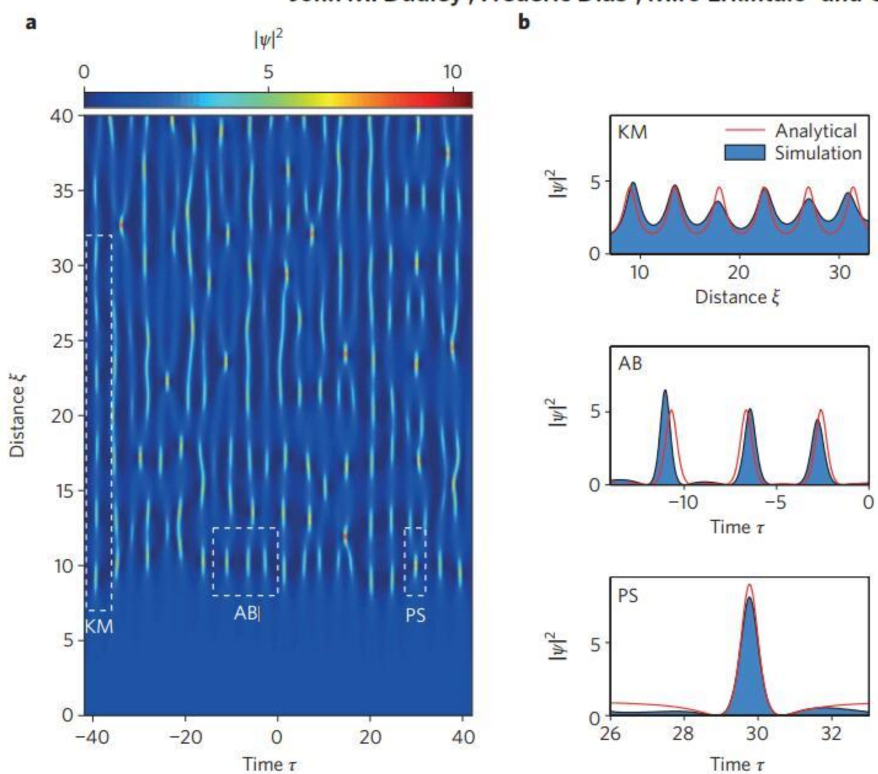


2. 调制不稳定性与多种局域波之间的关系

nature photonics
REVIEW ARTICLE
PUBLISHED ONLINE: 28 SEPTEMBER 2014 | DOI: 10.1038/NPHOTON.2014.220

Instabilities, breathers and rogue waves in optics

John M. Dudley[1], Frédéric Dias[2], Miro Erkintalo[3] and Goëry Genty[4*]



调制不稳定性反应的是在连续波背景上的扰动信号增长的基本过程。（Akhmediev 呼吸子，怪波，和 Kuznetsov-Ma 呼吸子）。

2. 调制不稳定性与多种局域波之间的关系

J. M. Dudley

欧洲物理学会主席

国际光学年

指导委员会主席

调制不稳定性 (MI) 只能定性解释形成机制

怪波机制定量解释—长期以来悬而未决

思路

- 理论修正共振线上的MI分析
- 找到局域波的特征物理量
- 提出建立定量对应关系的方法

成果

- 定量解释怪波机制——MI的共振扰动
- 建立局域波观测相图

LC Zhao, L Ling, J. Opt. Soc. Am. B (2016)

提出由线性稳定分析结果来判断怪波结构的方法

Phys. Rev. E 96, 022211 (2017)

提出产生高阶怪波激发的新方法

Opt. Lett. 45, 2399 (2020)

建立多种非线性系统中基本局域波的观测相图

Phys. Rev. E 93, 032215 (2016)

Phys. Rev. E 94, 042221 (2016)

Phys. Rev. E 95, 042212 (2017)

2. 调制不稳定性与多种局域波之间的关系

线性稳定性分析

$$iq_z + \frac{1}{2}q_{tt} + |q|^2 q = 0$$

平面波解 $$q_0 = ae^{i\theta} = ae^{i(kz+\omega t)}$$

这里 $k = A^2 - \frac{1}{2}\omega^2.$

在平面波背景上引入弱扰动

$$q = (a+p)e^{i\theta}$$

这里 $p(t,z)$ 是一个弱扰动.

线性化

$$ip_z + i\omega p_z + \frac{1}{2}p_{tt} + A^2(p+p*) = 0,$$

2. 调制不稳定性与多种局域波之间的关系

p可以被表示为

$$p = f_+ e^{i(\Omega t + Kz)} + f_- e^{-i(\Omega t + Kz)}$$

这里 f_+ 和 f_- 远小于 a。

色散关系

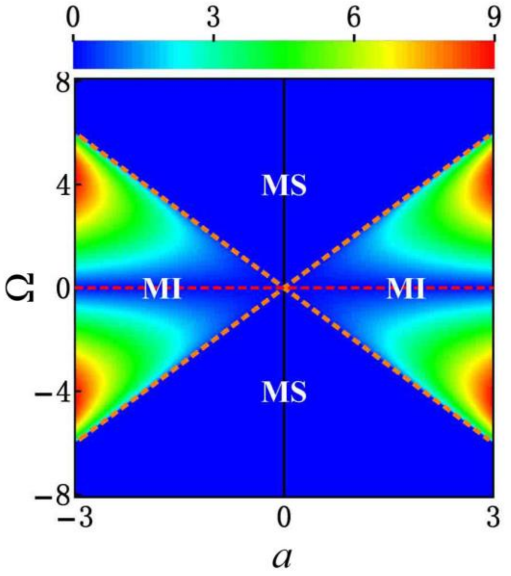
$$K = -\Omega\omega \pm |\Omega|\sqrt{\Omega^2/4 - a^2}$$

如果 $\mathrm{Im}(K) = 0$, K 是实的, 此时平面波背景在弱扰动下是稳定的.

如果 $\mathrm{Im}(K) \neq 0$, 扰动 p 将随着 z指数式增长.

调制不稳定增益 G：

$$G = |\mathrm{Im}(K)|$$

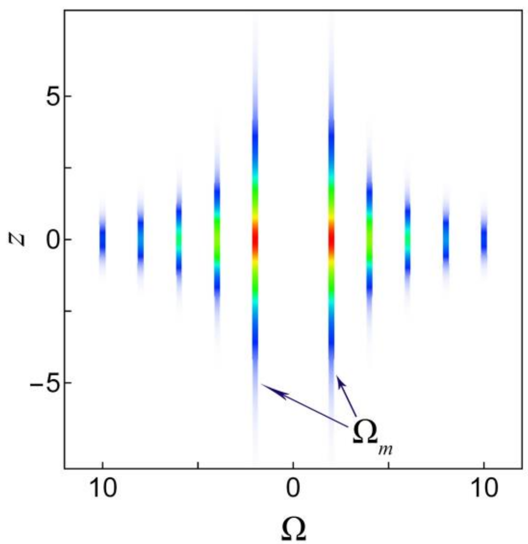


2. 调制不稳定性与多种局域波之间的关系

呼吸子和怪波解：

$$\boxed{\psi = (a + \psi_p)e^{i\theta}} \qquad (a \neq 0)$$

Akhmediev 呼吸子： $$\psi_{abp} = -\frac{2(a^2-b^2)\cosh(2b\sqrt{a^2-b^2}z) + 2ib\sqrt{a^2-b^2}\sinh(2b\sqrt{a^2-b^2}z)}{a\cosh(2b\sqrt{a^2-b^2}z) - b\cos[2\sqrt{a^2-b^2}(t-kz)]}$$

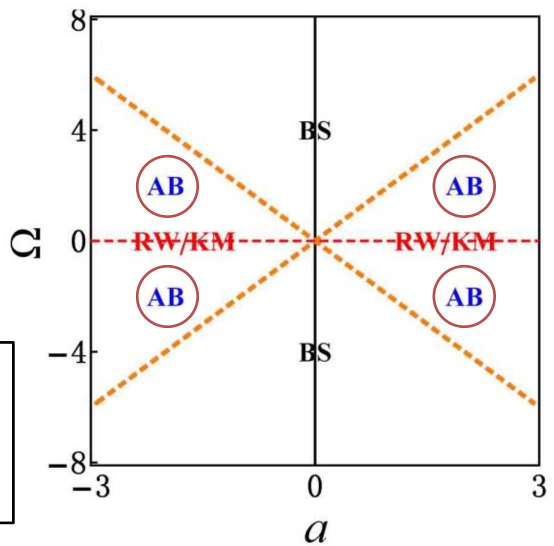


傅里叶变换：

$$F(\Omega, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_p e^{-i\Omega t} dt$$

主频率 $\Omega = \Omega_m = \pm 2\sqrt{a^2 - b^2}$

对应于共振线以外满足 $|\Omega| < 2a$ 的区域

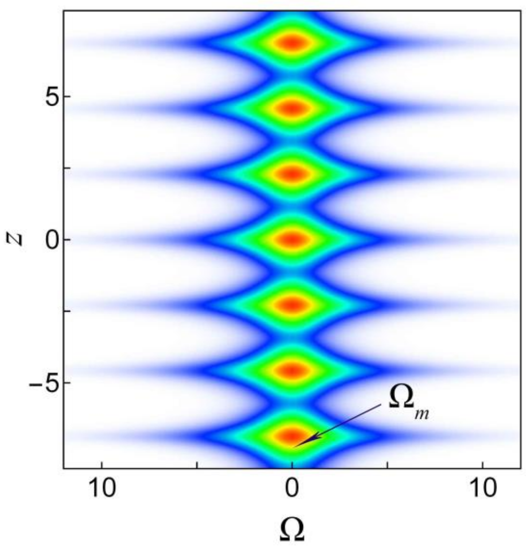


2. 调制不稳定性与多种局域波之间的关系

呼吸子和怪波解：

$$\boxed{\psi = (a + \psi_p)e^{i\theta}} \qquad (a \neq 0)$$

Kuznetsov-Ma 呼吸子： $\psi_{kmp} = -\dfrac{2(b^2-a^2)\cos(2b\sqrt{b^2-a^2}z) - 2ib\sqrt{b^2-a^2}\sin(2b\sqrt{b^2-a^2}z)}{b\cosh[2\sqrt{b^2-a^2}(t-\omega z)] - a\cos(2b\sqrt{b^2-a^2}z)}$

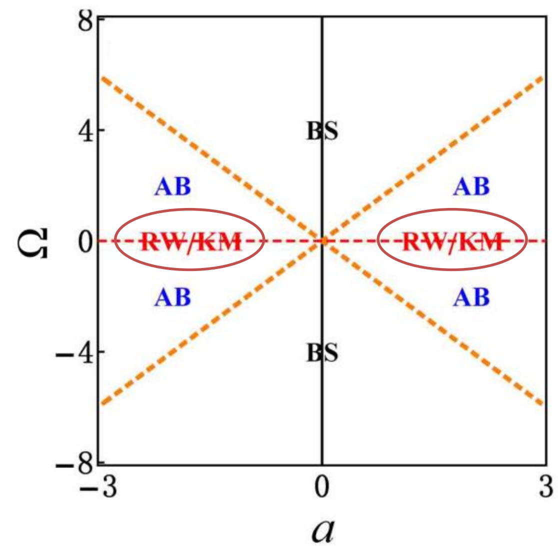


傅里叶变换：

$$F(\Omega, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_p e^{-i\Omega t} dt$$

主频率 $\Omega = \Omega_m = 0$

对应于共振线上 $a \neq 0$ 的地方

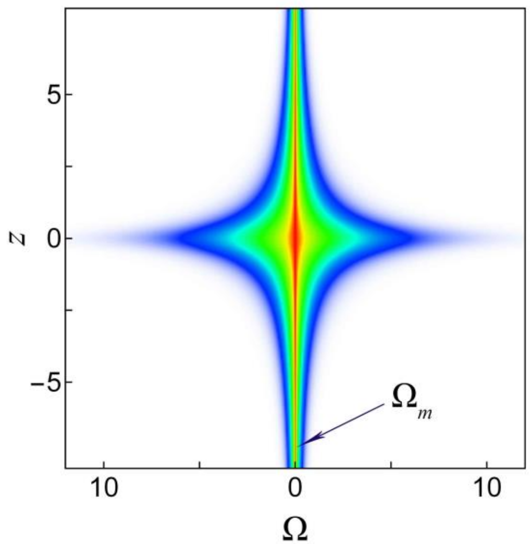


2. 调制不稳定性与多种局域波之间的关系

呼吸子和怪波解：

$$\boxed{\psi = (a + \psi_p)e^{i\theta}} \qquad (a \neq 0)$$

Peregrine 怪波： $$\psi_{rwp} = -a\frac{4(1+2ia^2z)}{1+4a^4z^2+4a^2(t-\omega z)^2}$$

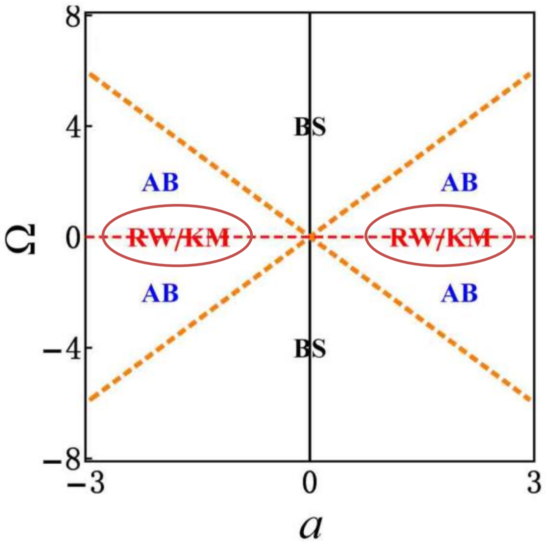


傅里叶变换：

$$F(\Omega, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_p e^{-i\Omega t} dt$$

主频率 $\Omega = \Omega_m = 0$

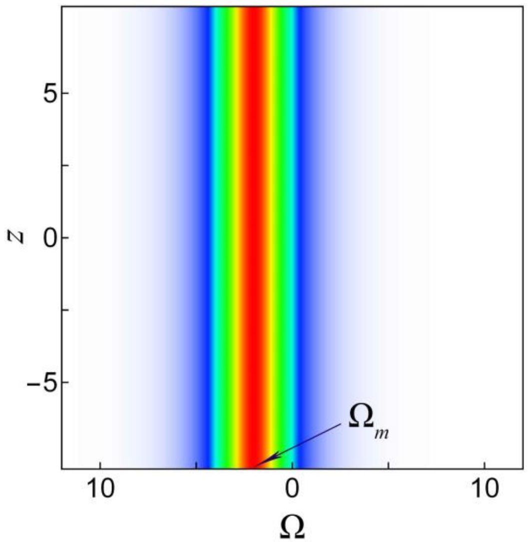
对应于共振线上 $a \neq 0$ 的地方



2. 调制不稳定性与多种局域波之间的关系

亮孤子解：

$$\boxed{\psi_{bs} = 0 + 2b\mathrm{sech}[2b(t-\omega z)]e^{i[\omega t+(2b^2-\frac{1}{2}\omega^2)z]}} \qquad (a=0)$$

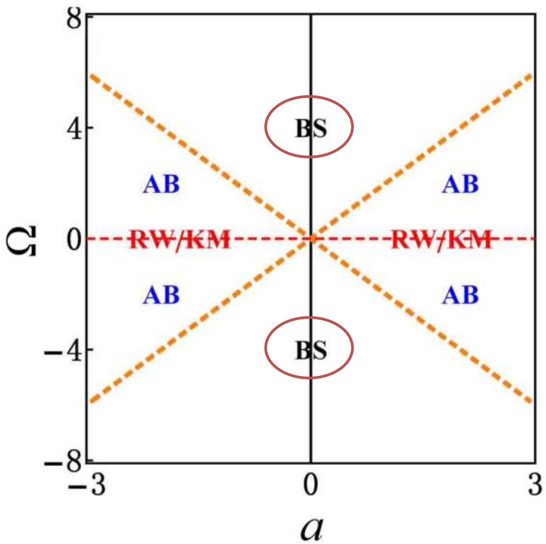


傅里叶变换：

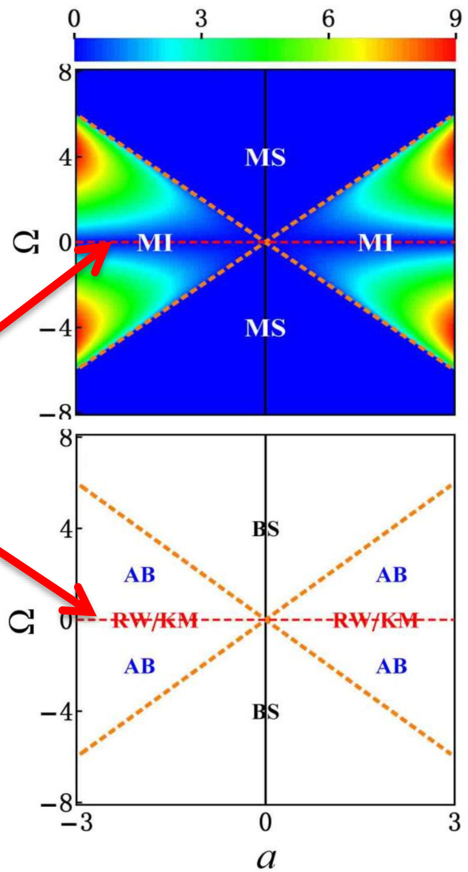
$$F(\Omega, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{bs} e^{-i\Omega t} dt$$

主频率 $\Omega = \Omega_m = \omega$

对应于直线 $a = 0$



2. 调制不稳定性与多种局域波之间的关系



共振线

怪波产生于共振扰动的调制不稳定性。

Rogue wave → 有理解

共振扰动模式的增长率是有理形式的，其它的调制不稳定区是指数增长的。

ω' 是相对扰动频率(扰动信号频率与背景频率的差值)　a 背景振幅

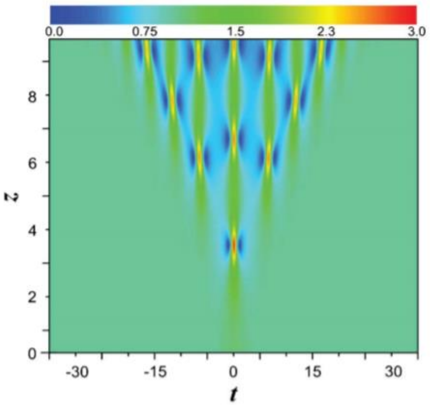
L. C. Zhao, et. al, J. Opt. Soc. Am. B 33, 050850 (2016).

2. 调制不稳定性与多种局域波之间的关系

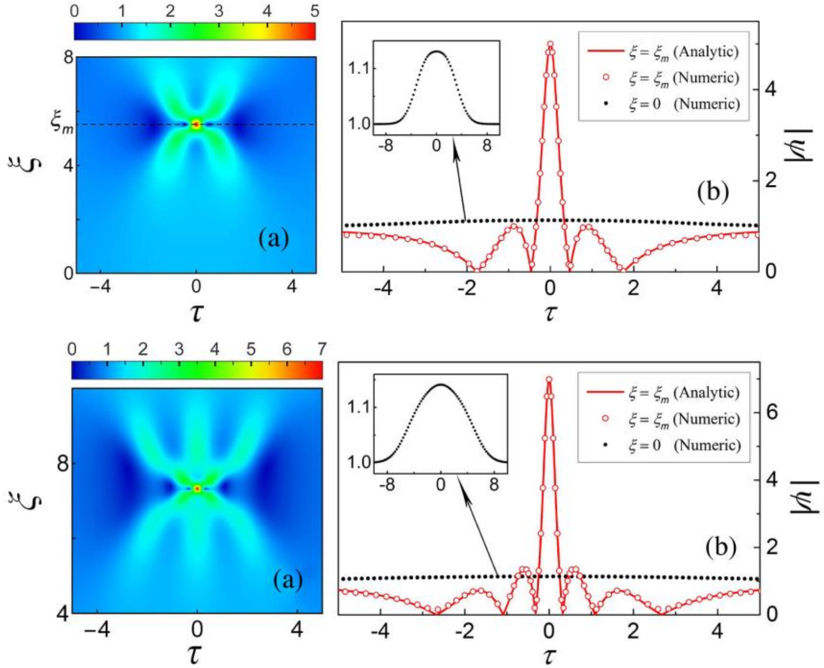
我们用平面波上的单高斯扰动和多高斯扰动分别激发了一阶怪波和高阶怪波。

初始条件：

$$\psi_n(0,\tau) = 1 + \sum_{i\geq 1}^{n} a_i \exp[-(\tau-\delta_i)^2/w_i^2]$$



L. C. Zhao, et. al, J. Opt. Soc. Am. B 33, 050850 (2016).



P. Gao, et al., Opt. Lett. 45, 2399 (2020).

2. 调制不稳定性与多种局域波之间的关系

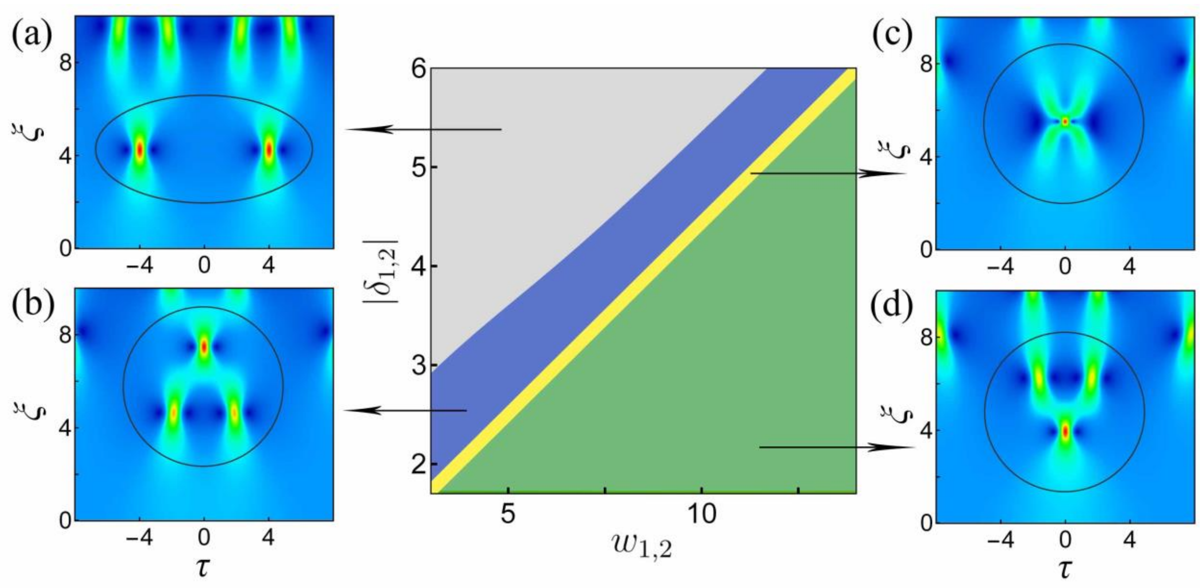
不同的初始偏移量$|\delta_{1,2}|$和宽度$w_{1,2}$可以诱发不同的怪波图样：

(a) 当$|\delta_{1,2}| >> \delta$，激发出来的是两个分立的怪波。

(b) 当$|\delta_{1,2}| > \delta$，激发出来的是三胞胎怪波。

(c) 当$|\delta_{1,2}| = \delta$，激发出来的是聚合二阶怪波。

(d) 当$|\delta_{1,2}| < \delta$，激发出来的是翻转的三胞胎怪波。



(δ —— 激发聚合二阶怪波所需的初始偏移量)

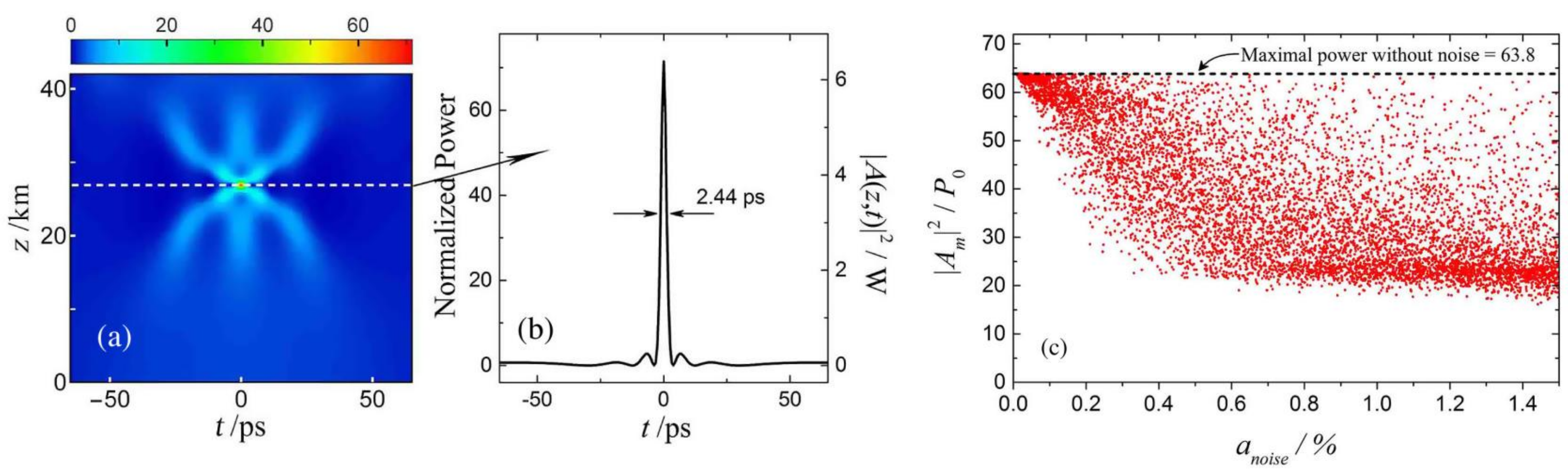
2. 调制不稳定性与多种局域波之间的关系

在引入光纤损耗的情况下，激发出来的三阶怪波的强度可以达到初始背景波的63.8倍，并且在存在噪音时仍然保持较大强度。

初始条件：

$$A_n(0,t) = \sqrt{P_0}\left(1 + \sum_{i\geq 1}^{n} a_i \exp[-(t-\delta_i)^2/w_i^2]\right)$$

$$A_{\text{noise}}(0,t) = A_n(0,t)(1 + a_{\text{noise}}\,\text{Random}[-1,1])$$

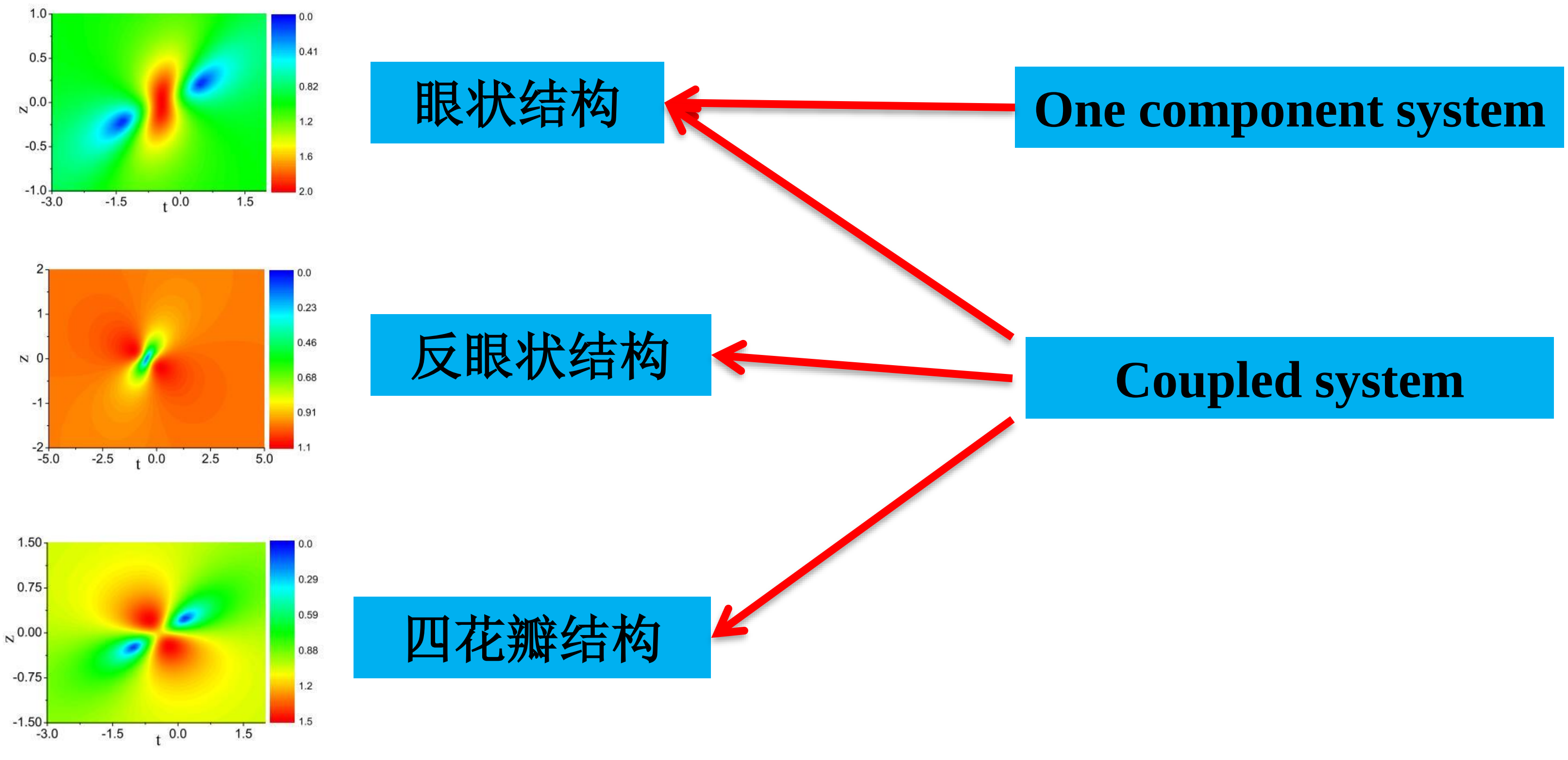


P. Gao, et al., Opt. Lett. 45, 2399 (2020).

2. 调制不稳定性与多种局域波之间的关系

怪波产生于调制不稳定区的共振扰动。

哪些物理参数决定了怪波的时空结构?



2. 调制不稳定性与多种局域波之间的关系

$\boxed{\dfrac{(\chi_R+b_i)^2}{\chi_I^2}}$ 可以用来判断耦合非线性薛定谔方程描述的系统中的怪波结构

（χ_R 和 χ_I 是怪波解中的参量）

$$\frac{(\chi_R+b_i)^2}{\chi_I^2} \le \frac{1}{3} \longrightarrow \text{眼状结构}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{(\chi_R+b_i)^2}{\chi_I^2} < 3 \longrightarrow \text{四花瓣结构}$$

$$3 < \frac{(\chi_R+b_i)^2}{\chi_I^2} \longrightarrow \text{反眼状结构}$$

通过改变 $\dfrac{(\chi_R+b_i)^2}{\chi_I^2}$ 的值可以改变基本怪波结构

L. M. Ling, L. C. Zhao, Z. Y. Yang, and B. L. Guo, Phys. Rev. E, 96, 022211 (2017).

2. 调制不稳定性与多种局域波之间的关系

对N组分的非线性薛定谔方程的平面波背景进行线性稳定性分析，得到其色散关系：

$$\boxed{1+\sum_{i=1}^{N}\frac{a_i^2}{(\Omega_k+b_i)^2}=0}$$

这里 Ω_k 是扰动波矢，共振扰动的扰动频率为0.

$\mathrm{Im}[\Omega_k]$ 定义为扰动的增长率, $\mathrm{Re}[\Omega_k]$ 定义为扰动的演化能量

$$\boxed{1+\sum_{i=1}^{N}\frac{a_i^2}{(\Omega_k+b_i)^2}=0} \qquad \boxed{1+\sum_{i=1}^{N}\frac{a_i^2}{(\chi+b_i)^2}=0,}$$

$$\boxed{\chi=\Omega_k}$$

也就是说, $\mathrm{Re}[\Omega_k]$ and $\mathrm{Im}[\Omega_k]$ 可以用来判断耦合非线性薛定谔方程描述的系统中基本怪波的时空结构

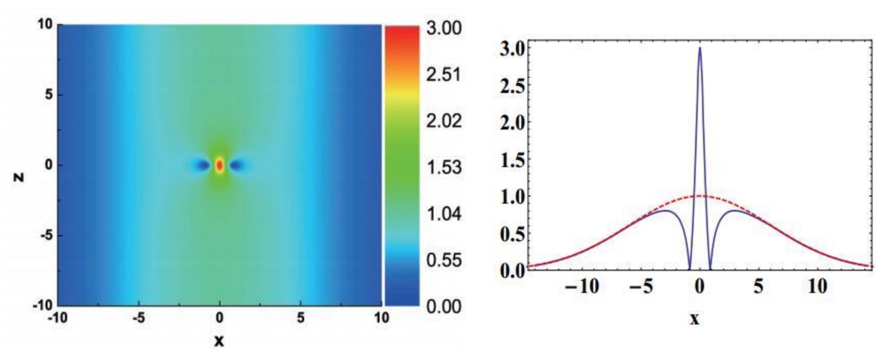
L. M. Ling, L. C. Zhao, Z. Y. Yang, and B. L. Guo, Phys. Rev. E, 96, 022211 (2017).

2. 调制不稳定性与多种局域波之间的关系

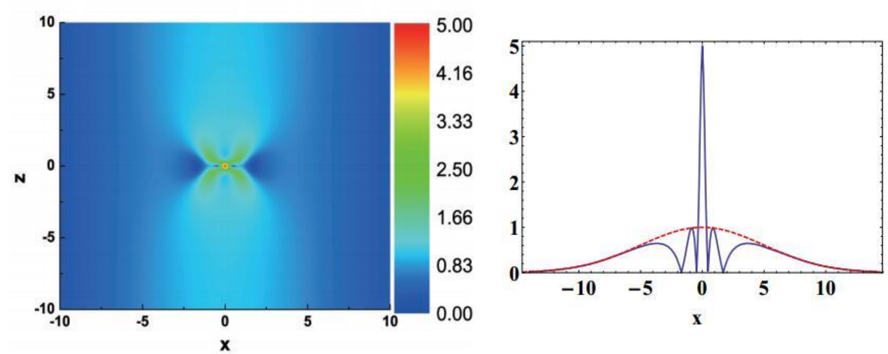
怪波在平面波上激发已经广为人知，但现实中无限宽的平面波是不存在的。我们理论上首次预言了怪波可以在**高斯背景**上激发。

传输方程：

$$
\begin{aligned}
&i\frac{\partial u}{\partial \zeta}+\frac{1}{2k_0}f(\zeta,\chi)\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2}+\frac{k_0}{n_0}n_1(\zeta,\chi)u\\
&\quad+\frac{k_0}{n_0}g(\zeta,\chi)|u|^2u+i\frac{k_0}{n_0}\gamma(\zeta,\chi)u=0, \qquad (1)
\end{aligned}
$$



高斯背景上的一阶怪波



高斯背景上的二阶怪波

C. Liu, Z.-Y. Yang, L.-C. Zhao, G.-G. Xin, W.-L. Yang, Optics Letters 39, 1057-1060 (2014).

3. 高阶效应诱发的局域波态转换

当考虑以下必要的高阶效应（三阶色散和延迟的非线性响应项）时，调制不稳定区域中出现了一个调制稳定的子区域。当怪波和呼吸子由不稳定区域演化且接近这个稳定区域的时候会出现态转换现象。

Hirota模型:

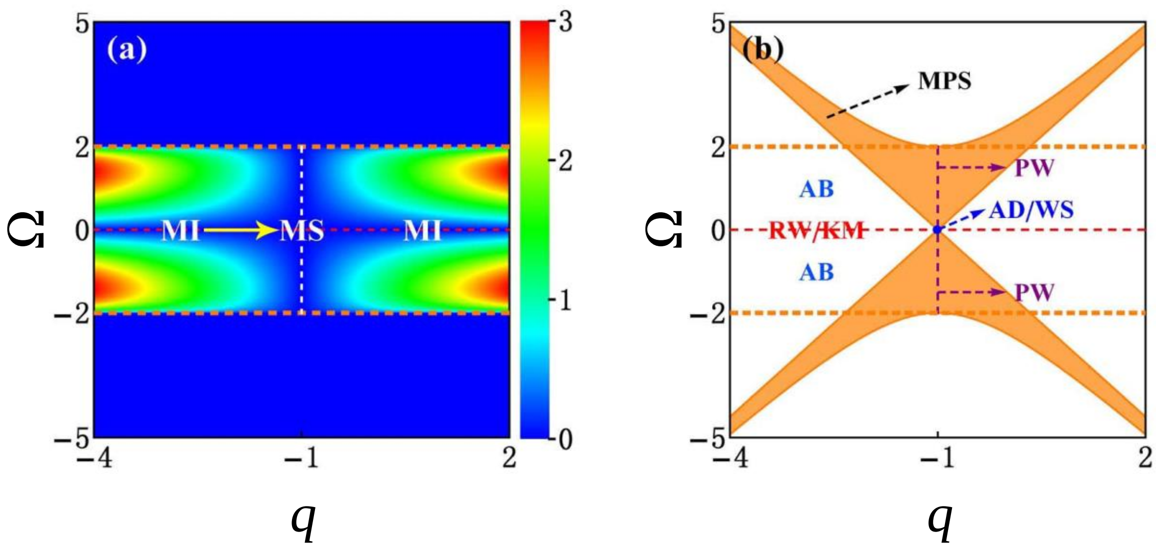
$$iE_z + \frac{1}{2}E_{tt} + |E|^2 E - i\beta(E_{ttt} + 6|E|^2 E_t) = 0,$$

增益值:

$$G = \left|\mathrm{Im}\left[\Omega\sqrt{(\Omega^2 - 4a^2)(1/2 + 3\beta q)^2}\right]\right|$$

稳定线:

$$q = q_s = -\frac{1}{6\beta}$$



3. 高阶效应诱发的局域波态转换

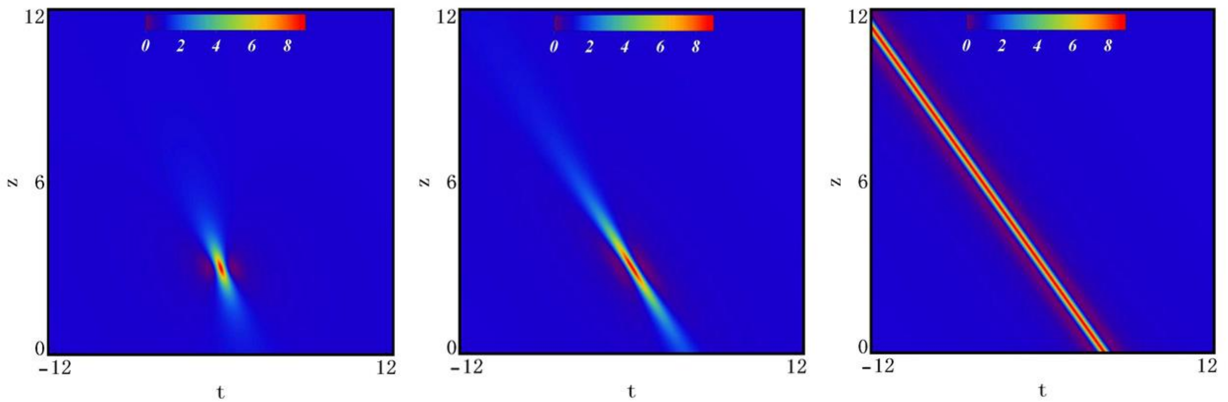
一阶怪波和W型孤子的态转换：

一阶怪波解: $$u_{1rw}(z,t) = u_0 \left[\frac{4 + 8ia^2(1 - q/q_s)\xi}{1 + 4a^4(1 - q/q_s)^2\xi^2 + 4a^2(\tau - \upsilon\xi)^2} - 1 \right]$$

$q \to q_s$

W型孤子解: $$u_s(z,t) = ae^{i\theta_s} \left[\frac{4}{1 + 4a^2(\tau - \upsilon_s\xi)^2} - 1 \right]$$

$q = 0$ $\quad$ $q = q_s / 2$ $\quad$ $q = q_s$



(a) (b) (c)

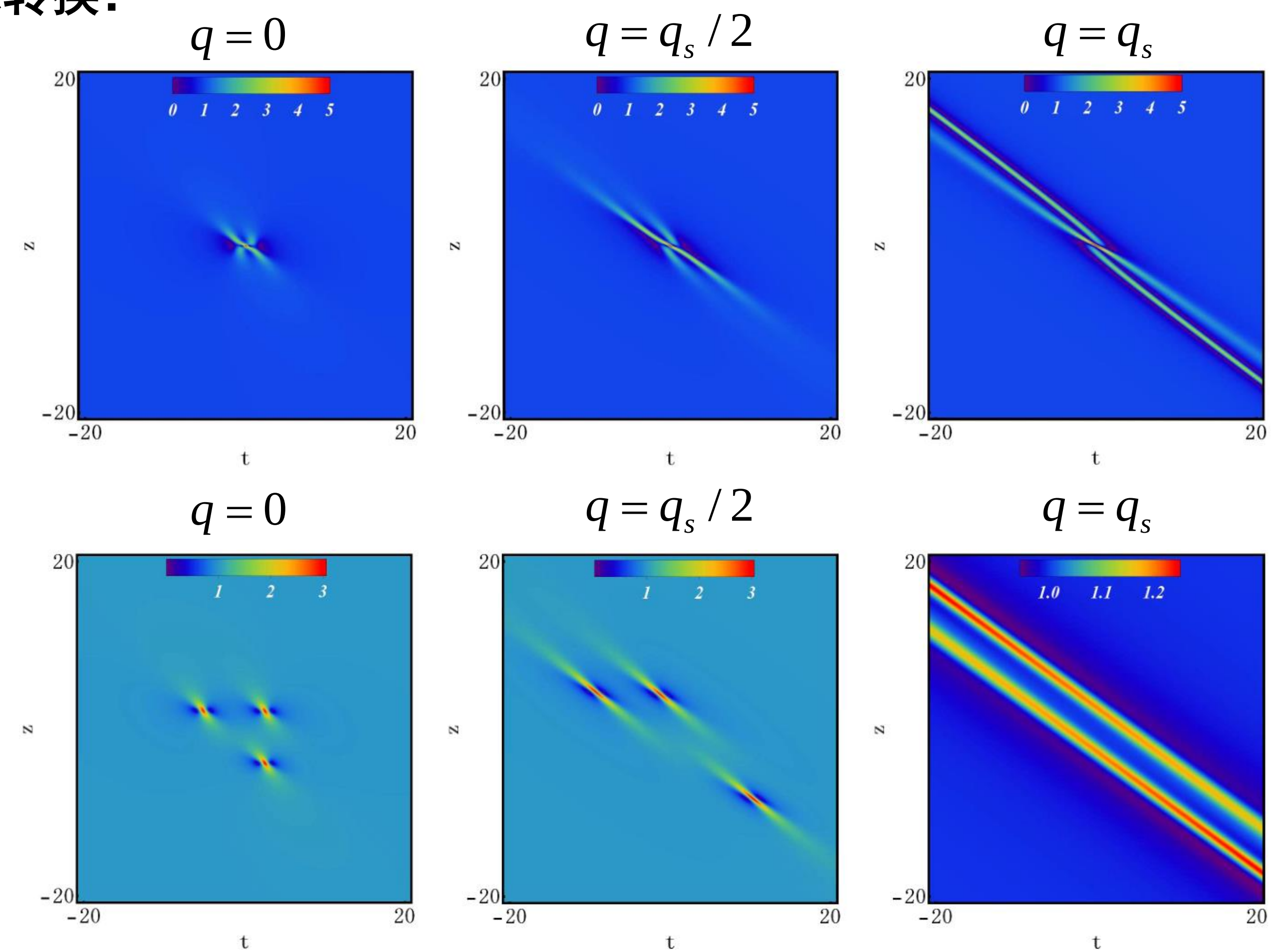
C. Liu, Z. Y. Yang, L. C. Zhao, and W. L. Yang, Phys. Rev. E 91, 022904 (2015).

3. 高阶效应诱发的局域波态转换

二阶怪波和孤子的态转换：

单峰
二阶怪波:

“三胞胎”
二阶怪波:



C. Liu, Z. Y. Yang, L. C. Zhao, and W. L. Yang, Phys. Rev. E 91, 022904 (2015).

3. 高阶效应诱发的局域波态转换

Akhmediev呼吸子与周期波的态转换：

Akhmediev 呼吸子解:

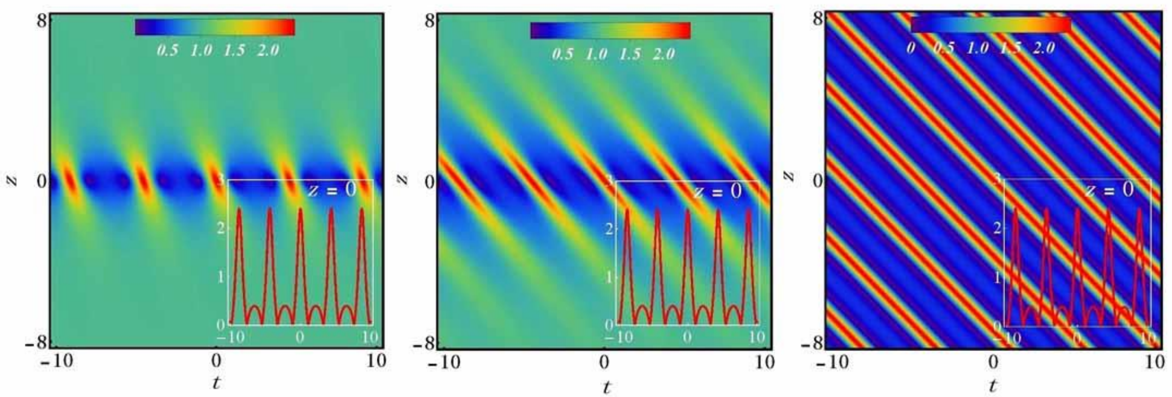
$$u_{1,2}(z,t)=\left[\frac{2\eta^2\cosh(\kappa\xi)+i2\eta a_1\sinh(\kappa\xi)}{a\cosh(\kappa\xi)-e^{i\sigma}a_1\cos[2\eta(\tau+v_1\xi)-\mu]}-a\right]e^{i\theta}$$

$q\rightarrow q_s$

周期波解:

$$u_{p\ 1,2}(z,t)=\left[\frac{2\eta^2}{a-e^{i\sigma}a_1\cos[2\eta(\tau+v\xi)-\mu]}-a\right]e^{i\theta}$$

$q=0$ $q=q_s/2$ $q=q_s$



(a) (b) (c)

C. Liu, et al, Phys. Rev. E 94, 042221 (2016).

3. 高阶效应诱发的局域波态转换

Kuznetsov-Ma呼吸子与单峰孤子的态转换：

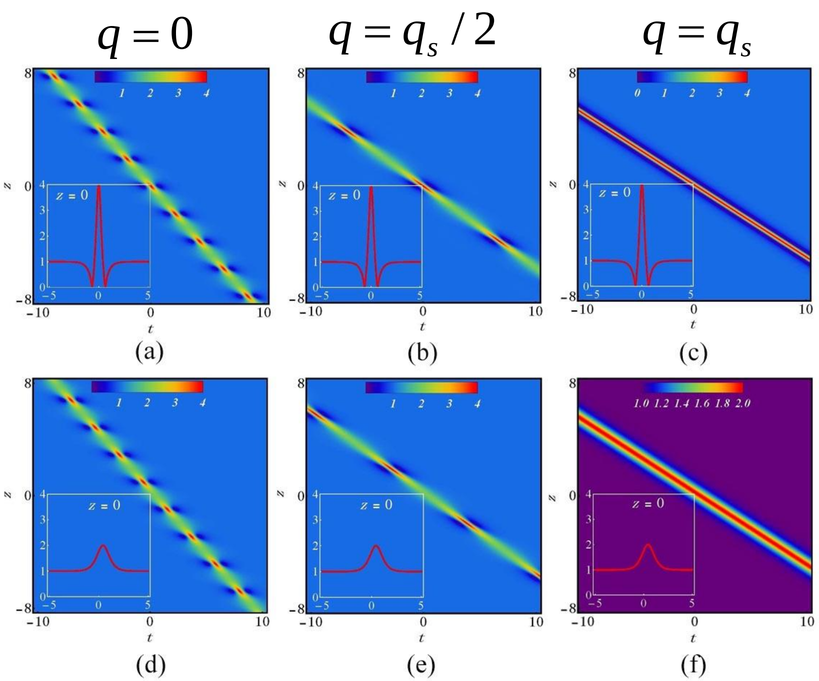
Kuznetsov-Ma呼吸子解:

$$u_{1,2}(z,t)=\left[\frac{2\eta'^2\cos(\kappa'\xi)+i2\eta' a_1\sin(\kappa'\xi)}{e^{i\sigma}a_1\cosh[2\eta'(\tau+v_1\xi)+\mu']-a\cos(\kappa'\xi)}-a\right]e^{i\theta}$$

$q \to q_s$

单峰孤子解:

$$u_{s\ 1,2}(z,t)=\left[\frac{2\eta'^2}{e^{i\sigma}a_1\cosh[2\eta'(\tau+v\xi)+\mu']-a}-a\right]e^{i\theta}$$



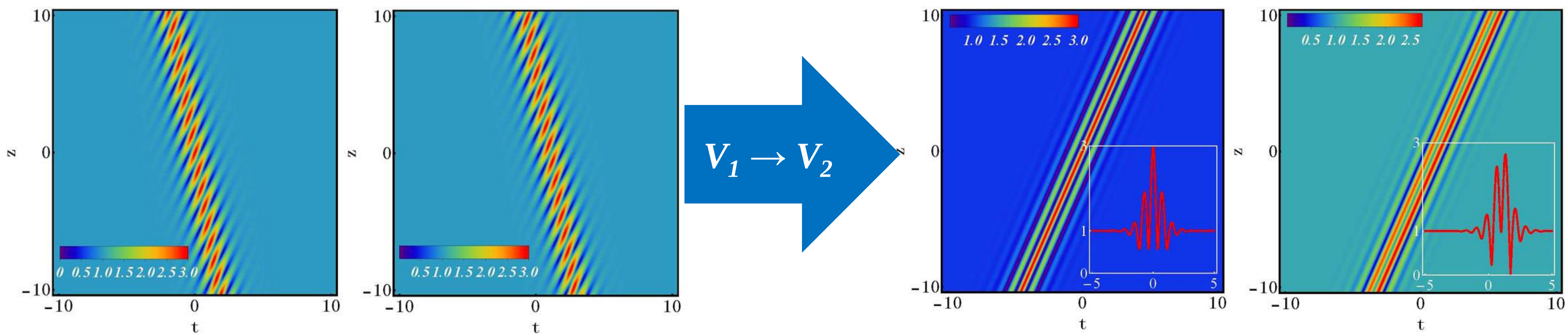
当$\sigma=0$时，Kuznetsov-Ma呼吸子转化为W型孤子；当$\sigma=\pi$时，Kuznetsov-Ma呼吸子转化为反暗孤子。

C. Liu, et al, Phys. Rev. E 94, 042221 (2016).

3. 高阶效应诱发的局域波态转换

一般呼吸子与多峰孤子的态转换：

一般呼吸子：　　　　多峰孤子：



(a)　(b)　(a)　(b)

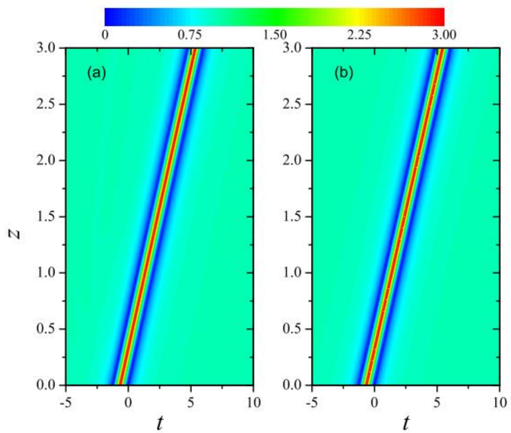
V_1 和 V_2 分别为波的周期性和局域性成分传播的速度。

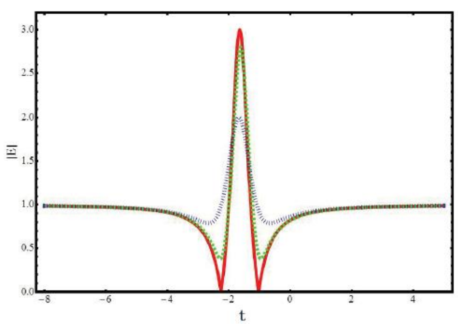
C. Liu, et al, Phys. Rev. E 94, 042221 (2016).

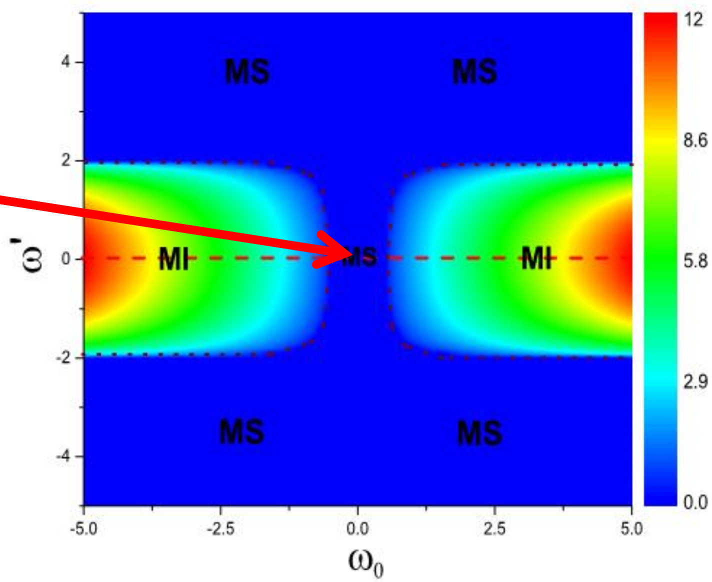
3. 高阶效应诱发的局域波态转换

Sasa-Satsuma equation

$$iE_z + \frac{1}{2}E_{tt} + |E|^2E + i\epsilon(E_{ttt} + 6|E|^2E_t + 3E|E|_t^2) = 0,$$







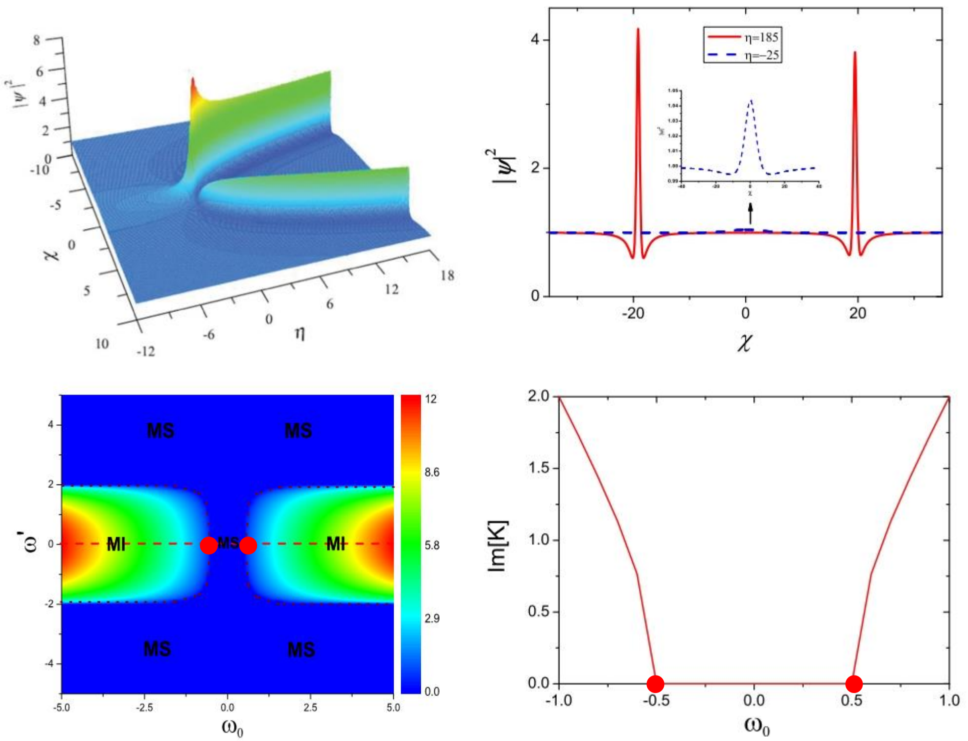
有理解在调制稳定区对应于W形孤子

L. C. Zhao, et. al, Phys. Rev. E 89, 023210 (2014).

3. 高阶效应诱发的局域波态转换

Sasa-Satsuma equation

$$iE_z + \frac{1}{2}E_{tt} + |E|^2E + i\epsilon(E_{ttt} + 6|E|^2E_t + 3E|E|_t^2) = 0,$$



由一个弱的调制信号产生的两个W形孤子

在调制不稳定和调制稳定的临界区域出现从调制不稳定动力学到调制稳定动力学的自发转化

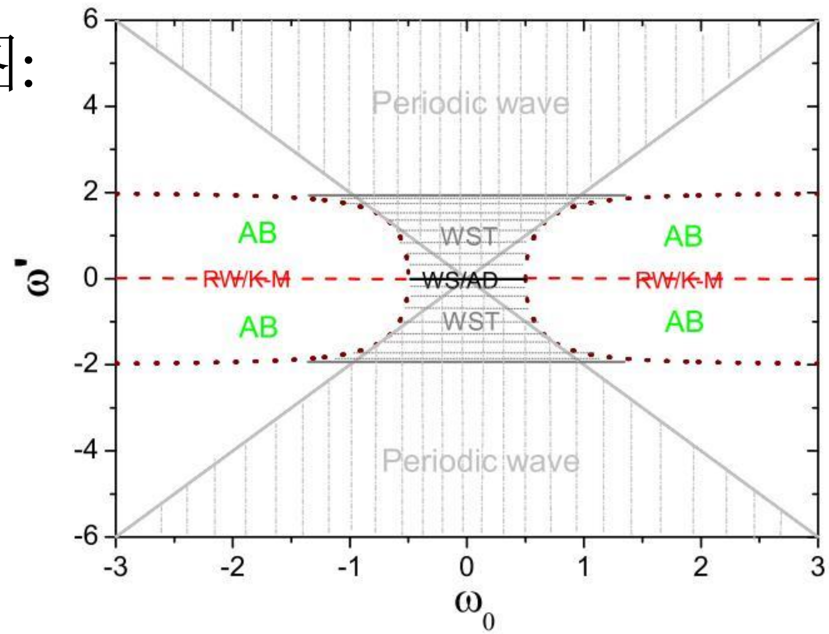
L. C. Zhao, et. al., Phys. Rev. E 93, 032215 (2016)

3. 高阶效应诱发的局域波态转换

Sasa-Satsuma equation

$$iE_z + \frac{1}{2}E_{tt} + |E|^2E + i\epsilon(E_{ttt} + 6|E|^2E_t + 3E|E|_t^2) = 0,$$

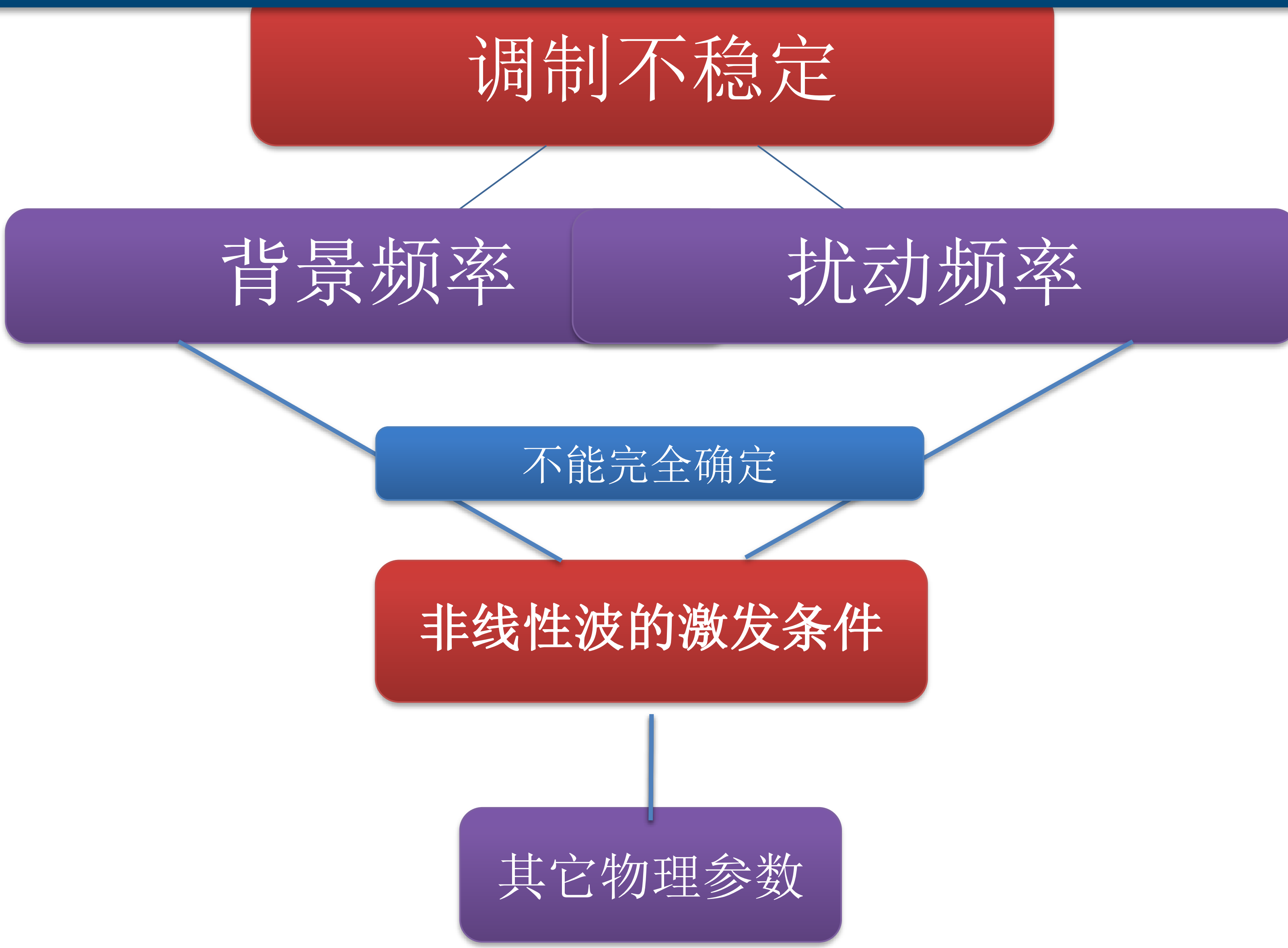
相图:



这里 “AB”, “RW”, “K-M”, “WST”, “WS”, and “AD”, 分别为 Akhmediev 呼吸子, 怪波, Kuznetsov-Ma 呼吸子, W形孤子链, W形孤子, 和反暗孤子.

L. C. Zhao, et. al., Phys. Rev. E 93, 032215 (2016)

4. 基本局域波的观测相图

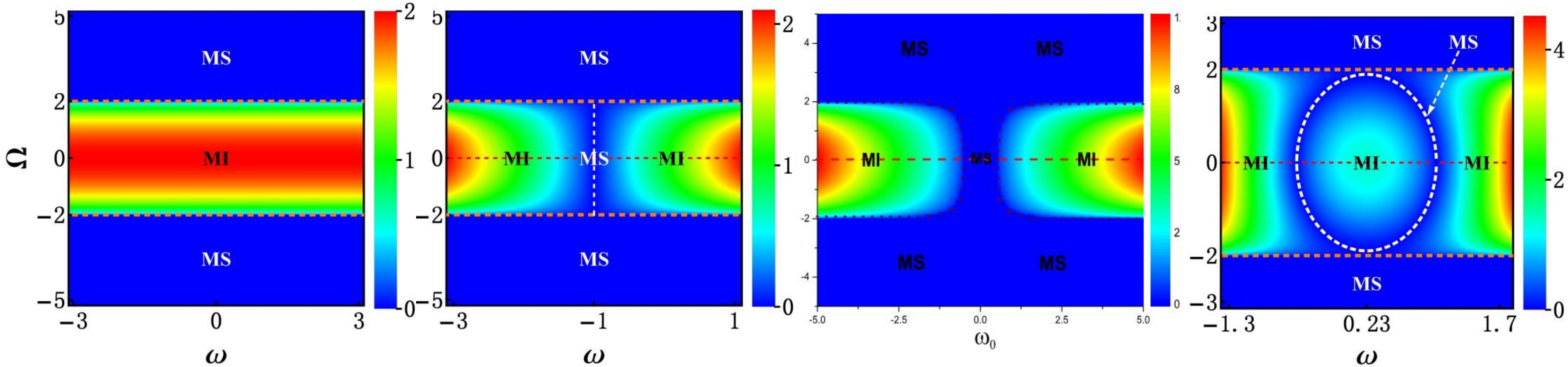


4. 基本局域波的观测相图

四阶非线性薛定谔模型：

$$i\psi_z + \frac{1}{2}\psi_{tt} + \psi|\psi|^2 + i\beta H[\psi(t,z)] + \gamma P[\psi(t,z)] = 0,$$

非线性薛定谔方程　　Hirota 方程　　S-S 方程　　四阶非线性薛定谔方程



在调制不稳定区没有调制稳定的区域

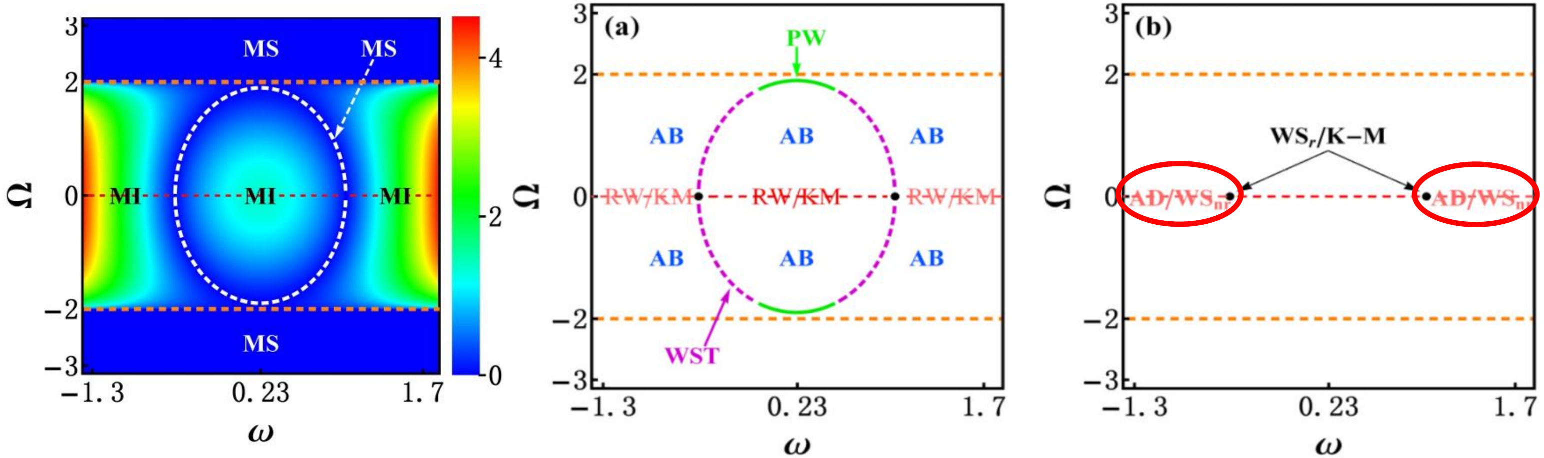
在调制不稳定带中有调制稳定的线

调制不稳定带中有调制稳定带

调制不稳定带中有调制稳定环

4. 基本局域波的观测相图

扰动能量在确定非线性波激发条件中的作用



MI: 调制不稳定, MS: 调制稳定, AB Akhmediev 呼吸子, K-M: Kuznetsov-Ma 呼吸子,
RW: 怪波, WS_r： 有理W形孤子, PW: 周期波, WST: W形孤子链，
AD: 反暗孤子, WS_{nr}： 非有理W形孤子.

L. Duan, L. C. Zhao, W. H. Xu, C. Liu, Z. Y. Yang, and W. L. Yang, Phys. Rev. E 95, 042212 (2017).

4. 基本局域波的观测相图

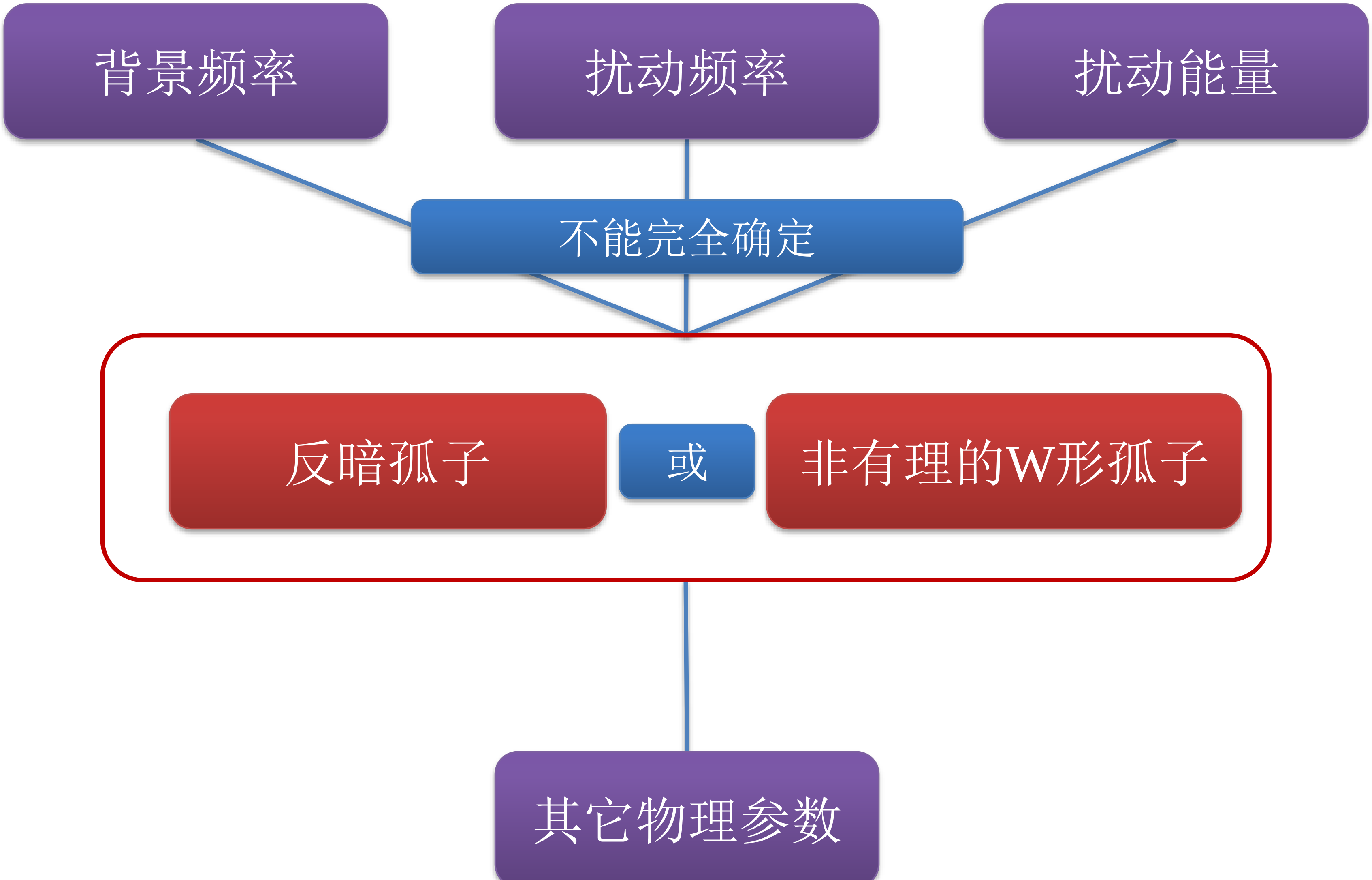
扰动能量在确定非线性波激发条件中的作用

扰动能量： $$\varepsilon=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left|\psi\right|^{2}-\left|\psi_{0}\right|^{2}\right)dt$$

$\boxed{\varepsilon=0}$			$\boxed{\varepsilon>0}$	
MI	←	怪波	Kuznetsov-Ma 呼吸子 →	MI or MS
MI	←	Akhmediev 呼吸子	非有理的W形孤子 →	MI or MS
MS	←	有理的W形孤子	反暗孤子 →	MI or MS
MS	←	W形孤子链	Tajiri-Watanabe 呼吸子 →	MI or MS
MS	←	周期波	多峰孤子 →	MI or MS

L. Duan, L. C. Zhao, W. H. Xu, C. Liu, Z. Y. Yang, and W. L. Yang, Phys. Rev. E 95, 042212 (2017).

4. 基本局域波的观测相图



4. 基本局域波的观测相图

相对相位在确定非线性波激发条件中的作用

反暗孤子或非有理的W形孤子

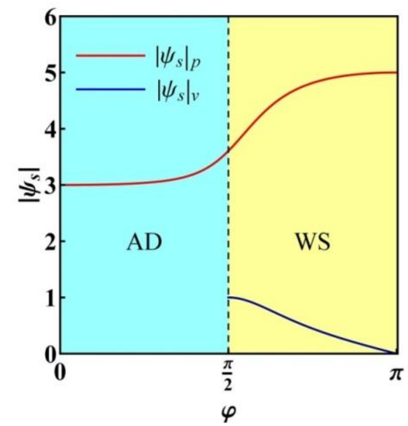
$$\psi_s = \left[A + \psi_{p\pm} e^{i\varphi_\pm}\right] e^{i\theta}$$

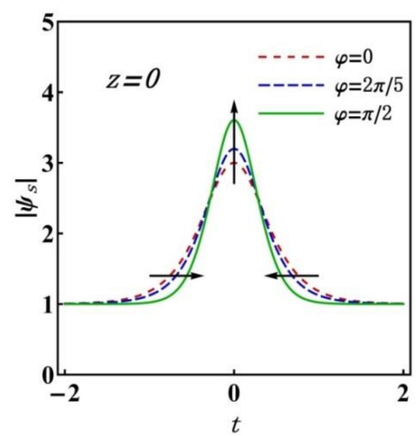
$$\psi_{p\pm} = \frac{\varepsilon_s \sqrt{\varepsilon_s^2 \cos^2(\phi) + 16 b^2 \sin^2(\phi)}}{8|b|\cosh(\beta_0) \mp 8A\cos(\phi)}$$

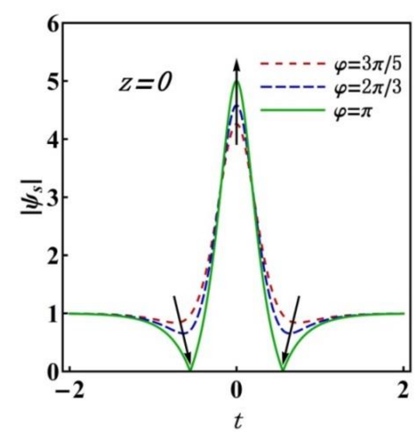
$\psi_{p\pm}$ 是正的实函数

$\varphi_\pm$ 表示扰动信号$\psi_{p\pm} e^{i\varphi_\pm + i\theta}$和平面波背景之间的相对相位

孤子类型和相对相位的关系







L. Duan, Z. Y. Yang, P. Gao, and W.L. Yang, Phys. Rev. E 99, 012216 (2019).

4. 基本局域波的观测相图

非线性波的激发条件

- 背景频率
- 扰动频率
- 扰动能量
- 相对相位

4. 基本局域波的观测相图

基本非线性波的激发条件和相图

参数$\alpha=\frac{\beta^2}{16\gamma^2}+\frac{1}{12\gamma}+a^2$，$\Delta=\left[\frac{\sqrt{(\varepsilon^2-4\Omega^2+16a^2)^2+16\varepsilon^2\Omega^2}-(\varepsilon^2-4\Omega^2+16a^2)}{8}\right]^{1/2}$，

$\nabla=-2\Delta\pm 8\omega\sqrt{\Delta}-6\omega^2+6a^2+\frac{1}{4}\varepsilon^2-\Omega^2$。

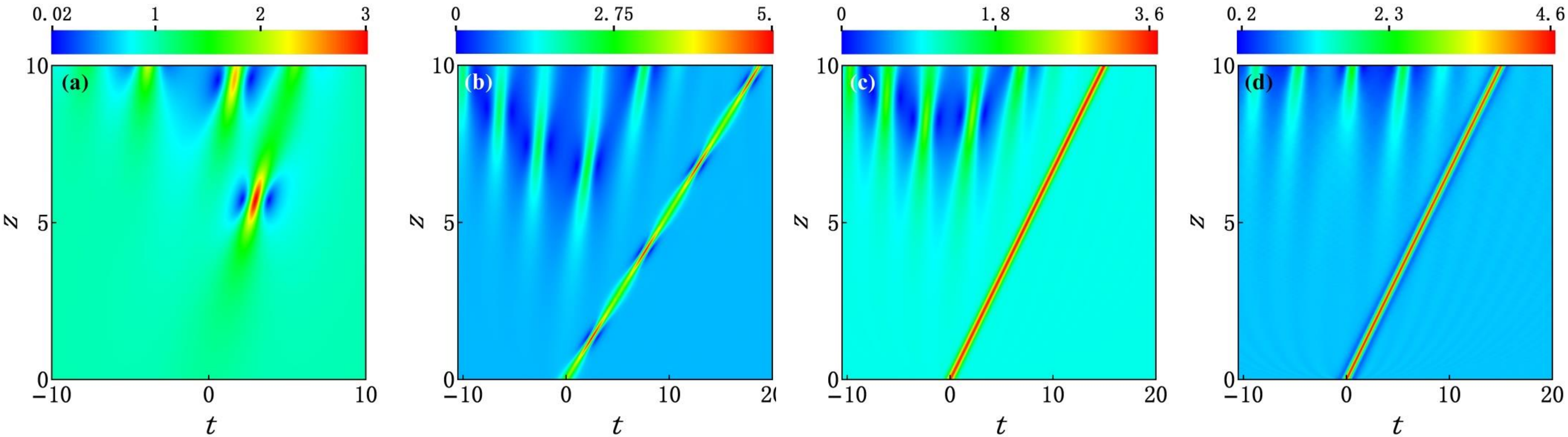
<table>
<tr><th colspan="4">激发条件</th><th rowspan="2">非线性波类型</th></tr>
<tr><th>Ω</th><th>ω</th><th>ε</th><th>φ</th></tr>
<tr><td rowspan="2">0</td><td>$\omega^2-\alpha\neq 0$</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">$\varphi\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})+2n\pi$</td><td>怪波</td></tr>
<tr><td>$\omega^2-\alpha=0,\alpha\geq 0$</td><td>有理W形孤子</td></tr>
<tr><td rowspan="3">0</td><td colspan="2">$\omega^2-\frac{\varepsilon^2}{24}-\alpha\neq 0,\varepsilon>0$</td><td>$\varphi\in\mathbb{R}$</td><td>Kuznetsov-Ma呼吸子</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\omega^2-\frac{\varepsilon^2}{24}-\alpha=0,\varepsilon>0$</td><td>$\varphi\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]+2n\pi$</td><td>非有理W形孤子</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\omega^2-\frac{\varepsilon^2}{24}-\alpha=0,\varepsilon>0$</td><td>$\varphi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]+2n\pi$</td><td>反暗孤子</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\omega^2+\frac{\Omega^2}{6}-\alpha\neq 0,\Omega\in(0,2)$</td><td rowspan="3">0</td><td>$\varphi\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})+2n\pi$</td><td>Akhmediev 呼吸子</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\omega^2+\frac{\Omega^2}{6}-\alpha=0$</td><td>$0<|\Omega|<\frac{\sqrt{3}}{|\sec\varphi|}$</td><td>W形孤子链</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\omega^2+\frac{\Omega^2}{6}-\alpha=0$</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{|\sec\varphi|}<|\Omega|<\frac{2}{|\sec\varphi|}$</td><td>周期波</td></tr>
<tr><td colspan="3">$1+2\beta\left(\pm\sqrt{\Delta}-3\omega\right)+2\gamma\nabla\neq 0$</td><td rowspan="2">$\varphi\in\mathbb{R}$</td><td>Tajiri-Watanabe呼吸子</td></tr>
<tr><td colspan="3">$1+2\beta\left(\pm\sqrt{\Delta}-3\omega\right)+2\gamma\nabla=0$</td><td>多峰孤子</td></tr>
</table>

4. 基本局域波的观测相图

非线性波激发的数值测试

初态　$\psi(t,0)=\left[1+a\,\mathrm{sech}(bt)e^{i\varphi}\right]e^{i\theta}$　背景频率 $\omega=0$, 扰动频率 $\Omega=0$

$\varepsilon=0.0047$	$\varepsilon=8.3$	$\varepsilon=6.946\approx4\sqrt{3}$	$\varepsilon=6.936\approx4\sqrt{3}$
$\varphi=0.56\pi$	$\varphi=0$	$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$	$\varphi=\dfrac{4\pi}{5}$



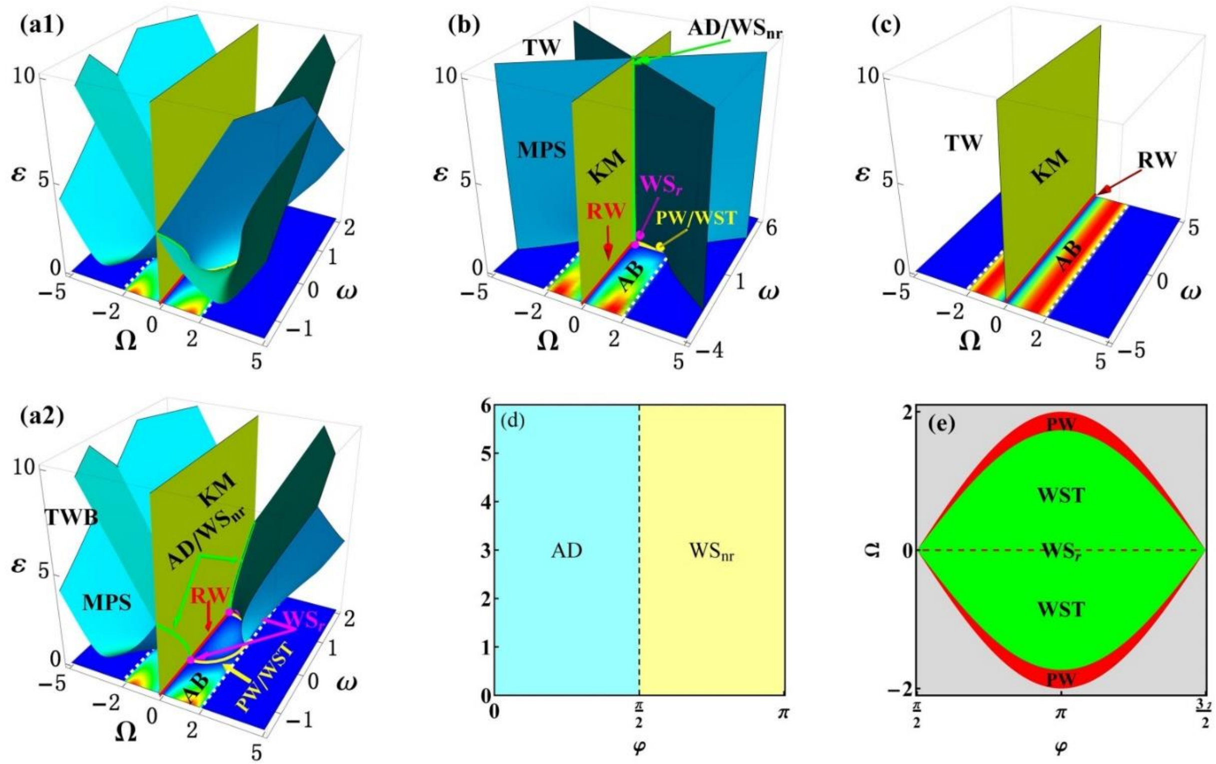
怪波	Kuznetsov-Ma 呼吸子	反暗孤子	非有理的W形孤子

L. Duan, Z. Y. Yang, P. Gao, and W. L. Yang, Phys. Rev. E 99, 012216 (2019).

4. 基本局域波的观测相图

基本非线性波的激发相图

四阶非线性薛定谔模型　　Hirota 模型　　非线性薛定谔模型



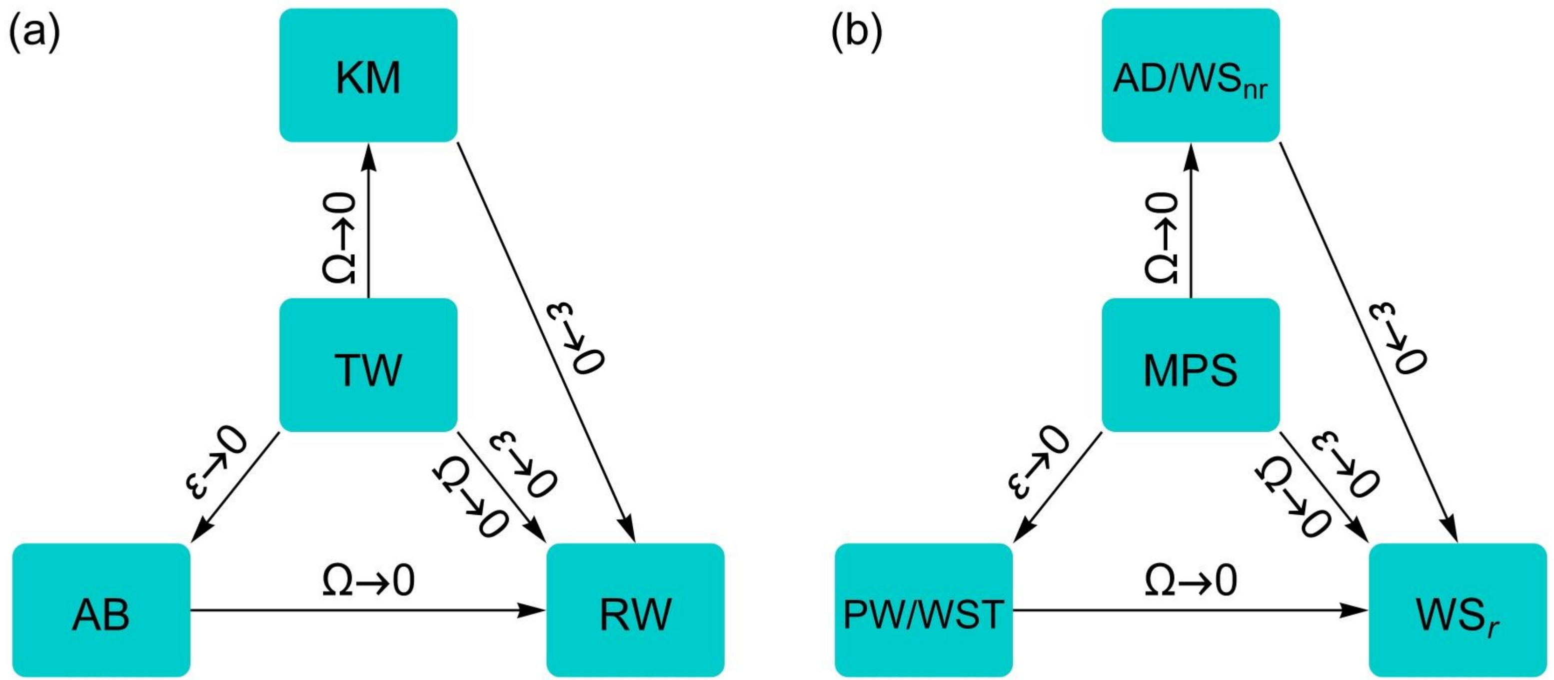
TWB: Tajiri – Watanabe呼吸子, AB Akhmediev 呼吸子, K-M: Kuznetsov-Ma呼吸子,

RW: 怪波, WS_r： 有理的W形孤子, MPS: 多峰孤子,AD: 反暗孤子,

WS_{nr}： 非有理的W形孤子, PW: 周期波,WST: W形孤子链.

4. 基本局域波的观测相图

不同非线性波间的转换关系



TW: Tajiri – Watanabe呼吸子, AB：Akhmediev呼吸子,

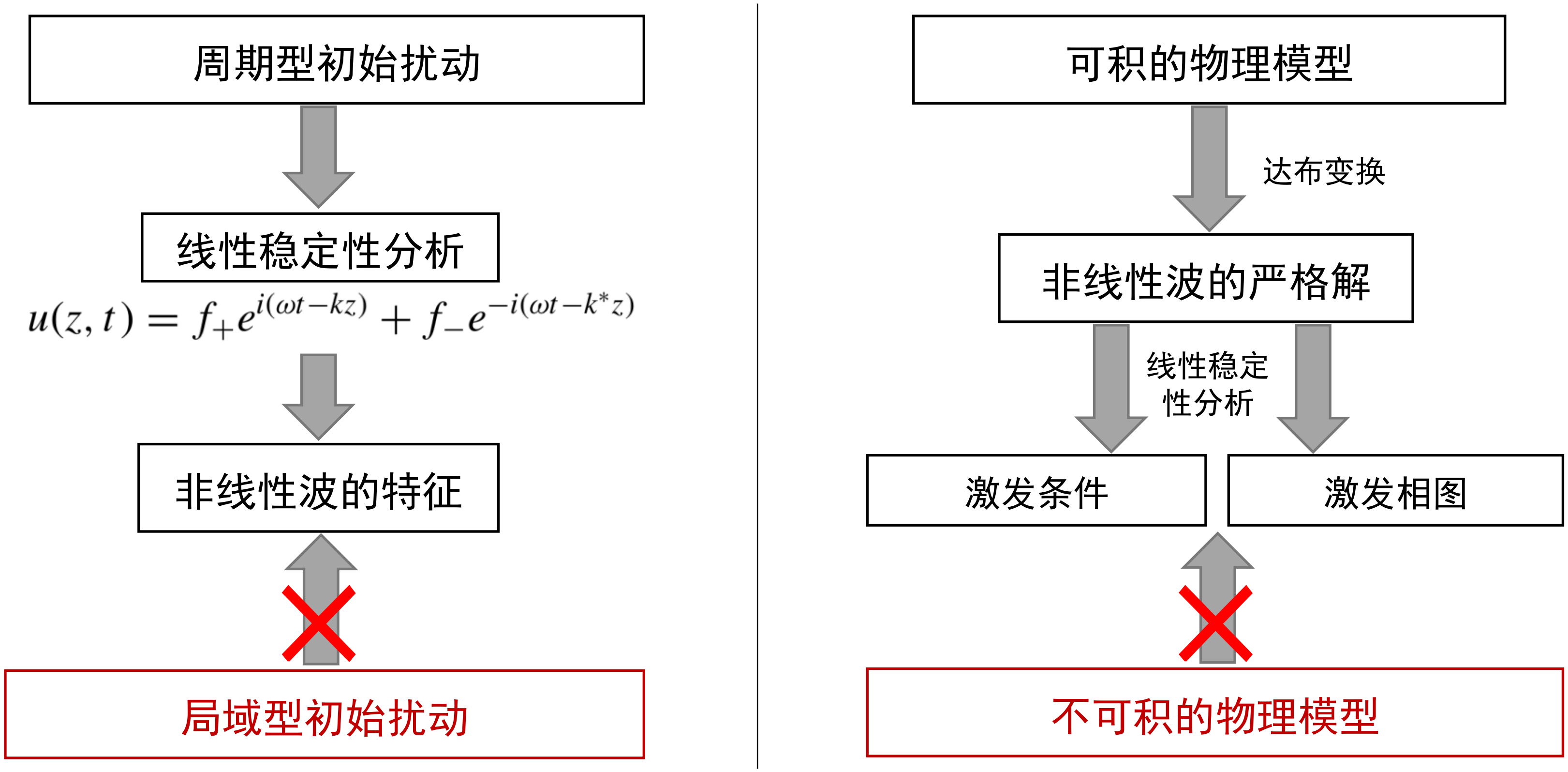
K-M: Kuznetsov-Ma呼吸子, RW: 怪波,

WS_r： 有理W形孤子, MPS: 多峰孤子,AD: 反暗孤子,

WS_{nr}： 非有理W形孤子, PW: 周期波,WST: W形孤子链.

5. 非线性波的可控激发

仍然面临的问题



因此，我们尝试去改进已有的线性稳定性分析方法。

5. 非线性波的可控激发

研究模型

Phys. Rev. E 102, 022207 (2020)

不可积模型


nature COMMUNICATIONS

ARTICLE

Received 8 Oct 2015 | Accepted 9 Dec 2015 | Published 29 Jan 2016 | Updated 9 Mar 2016 DOI: 10.1038/ncomms10427 OPEN

Pure-quartic solitons

Andrea Blanco-Redondo[1], C. Martijn de Sterke[1], J.E. Sipe[2], Thomas F. Krauss[3], Benjamin J. Eggleton[1] & Chad Husko[1]

最近，人们在只有四阶色散和自相位调制的非线性光纤中观察到了纯四阶孤子。描述这种光纤系统的模型是不可积的，其无量纲形式如下：

$$i\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{\beta_4}{24}\frac{\partial^4\psi}{\partial t^4}+\sigma|\psi|^2\psi=0 \tag{6}$$

β_4—— 四阶色散的系数

σ —— 自相位调制的系数

ψ —— 光场的慢变脉冲包络

5. 非线性波的可控激发

研究模型

通过慢变包络近似，我们可以通过把电场写成如下形式，将其快变部分分离出来：

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2}\hat{x}\left\{F(x,y)\psi(z,t)\exp[i(\beta_0 z-\omega_0 t)]+\text{c.c.}\right\}}$$ [1]

$F(x,y)$ —— 径向模式分布

$\psi(z,t)$ —— 慢变脉冲包络

ω_0 —— 光的频率

β_0 —— 光的波数

它描述了一个单模光纤中电场的基模，且入射光是在x方向偏振的。

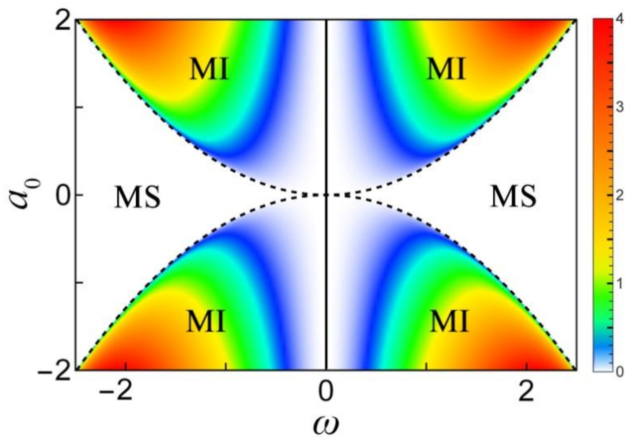
[1] G. P. Agrawal, Nonlinear Fiber Optics (Academic Press, New York, 2007).

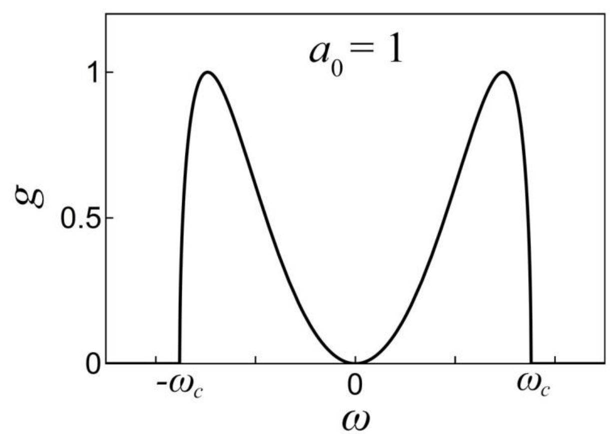
5. 非线性波的可控激发

线性稳定性分析的结果

调制不稳定性增益值：

$$g = \frac{1}{24}\sqrt{-\beta_4\omega^4(48\sigma a_0^2 + \beta_4\omega^4)} \qquad (7)$$





当$\beta_4 = -5, \sigma = 1, a_0 = 1$时，调制不稳定性的分布范围是

$$\boxed{0 < |\omega| < \omega_c} \qquad (\omega_c = 2\sqrt[4]{3/5} \approx 1.76)$$

我们可以通过设置不同的扰动频率ω去调节扰动的稳定性。

5. 非线性波的可控激发

考虑更为一般的扰动形式

为了分析扰动的局域性

在初始位置 $z=0$，我们考虑一个既带有周期性也带有局域性的扰动：

$$\psi(0,t)=\psi_0[1+a\,L(t)\cos(\omega t)] \tag{8}$$

$L(t)$是一个光滑的局域函数，它可以是sech型、高斯型、以及其它类似的形式。a和ω分别控制它的幅度和频率。

$L(t)\to 1$ → 纯周期函数

改进的线性稳定性分析将会退化为传统的线性稳定性分析。

$\omega\to 0$ → 纯局域函数

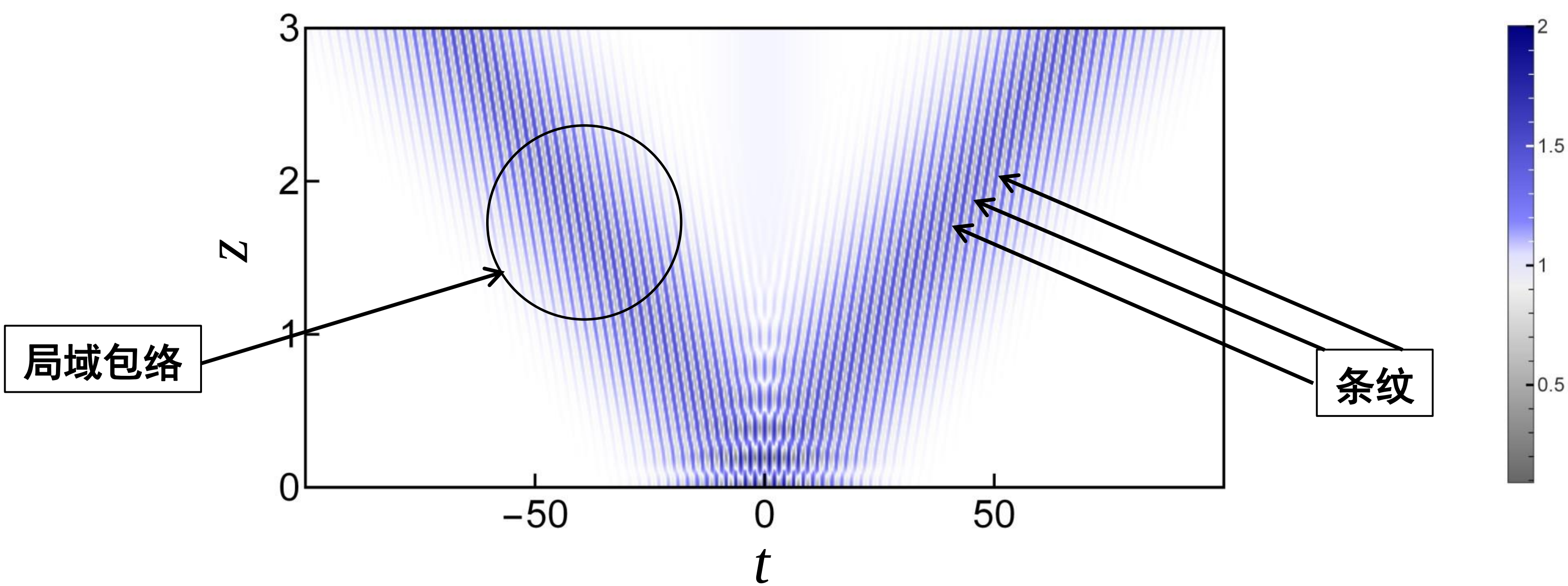
5. 非线性波的可控激发

一个高斯型扰动的演化

当 $L(t)=\exp(-t^2/\tau^2)$ 时，初始条件变为

$$\boxed{\psi(0,t)=\psi_0\left[1+a\,\cos(\omega t)\,e^{-t^2/\tau^2}\right]} \tag{9}$$

τ 代表扰动的宽度。当 $a=1$, $\omega=3$, $\tau=15$ 的时候，它的幅度演化图如下图所示。我们可以观察到两个局域包络和很多个条纹。



$\boxed{\beta_4=-5,\ \sigma=1,\ a_0=1}$

5. 非线性波的可控激发

改进的线性稳定性分析

为了描述上述扰动的动力学，我们对线性稳定性分析进行改进。这里仍然从被扰动的平面波解出发，但是将扰动的形式变为

$$u(z,t) = f_+ e^{p(z,t)} + f_- e^{p^*(z,t)} \tag{10}$$

这里关键的一点是让 $p(z, t)$ 是一个关于坐标且带有一般形式的复函数，这与传统线性稳定性分析中的$i(\omega t - kz)$相比是一个较大的拓展。

初始扰动可以写做一下形式：

$$\psi(0,t) = \psi_0\left[1 + \frac{a}{2}e^{i\omega t + \ln L(t)} + \frac{a}{2}e^{-i\omega t + \ln L(t)}\right], \tag{11}$$

我们可以得到它与 p之间的关系,

$$\boxed{p(0,t) = i\omega t + \ln L(t)}$$

5. 非线性波的可控激发

改进的线性稳定性分析

因此，类似于传统的线性稳定性分析，想要解出 f_+ 和 f_-^* 的非零解就需要满足以下条件：

$$p_z = \pm\frac{1}{24}\sqrt{-\beta_4 P_4\left(\beta_4 P_4 + 48\sigma a_0^2\right)} \tag{12}$$

其中 $P_4 = p_t^4 + 6p_t^2 p_{tt} + 3p_{tt}^2 + 4p_t p_{ttt} + p_{tttt}$.

同时，假设 $p^{(R)}$ 和 $p^{(I)}$ 分别为p的实部和虚部，就可以将扰动写为

$$u = [(f_+ + f_-)\underline{\cos p^{(I)}} + i(f_+ - f_-)\underline{\sin p^{(I)}}]\underline{e^{p^{(R)}}} \tag{13}$$

周期性

局域性

扰动的周期性表现为由背景和扰动之间干涉所形成的干涉条纹。
扰动的局域性表现为背景上的局域包络。

5. 非线性波的可控激发

扰动的特征函数

扰动的频率和传播常数可以表示为

$$\omega = p_t^{(I)}, \quad K = -p_z^{(I)}$$

则条纹的速度为

$$V_{\mathrm{fr}} = \frac{K}{\omega} = -\frac{p_z^{(I)}}{p_t^{(I)}}$$

然后，我们引入两个函数 η 和 G 去描述扰动在 t 和 z 方向的局域性：

$$\eta = p_t^{(R)}, \; G = -p_z^{(R)}$$

类比条纹的速度，我们可以把局域包络的速度表示为

$$V_{\mathrm{en}} = \frac{G}{\eta} = -\frac{p_z^{(R)}}{p_t^{(R)}}$$

在此光纤模型中波是在z方向进行演化和传播，这与一般物理系统中在t方向演化是不同的。因此，在这里我们将V_{fr}定义为 K/ω，而不是传统光学中的 ω/K。

5. 非线性波的可控激发

速度的表达式

方便起见，我们将局域包络中心处 ($t=0$) 的两个速度表示如下：

$$
\begin{aligned}
V_{\mathrm{fr}0}^{\pm} &= V_{\mathrm{fr}}(0) = \mp\frac{\mathrm{Im}[\sqrt{M(2N-M)}]}{24\omega\tau^4},\\
V_{\mathrm{en}0}^{\pm} &= V_{\mathrm{en}}(0) = \pm\frac{\beta_4\omega(6+\omega^2\tau^2)(N-M)}{6\tau^2\mathrm{Im}[\sqrt{M(2N-M)}]}
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

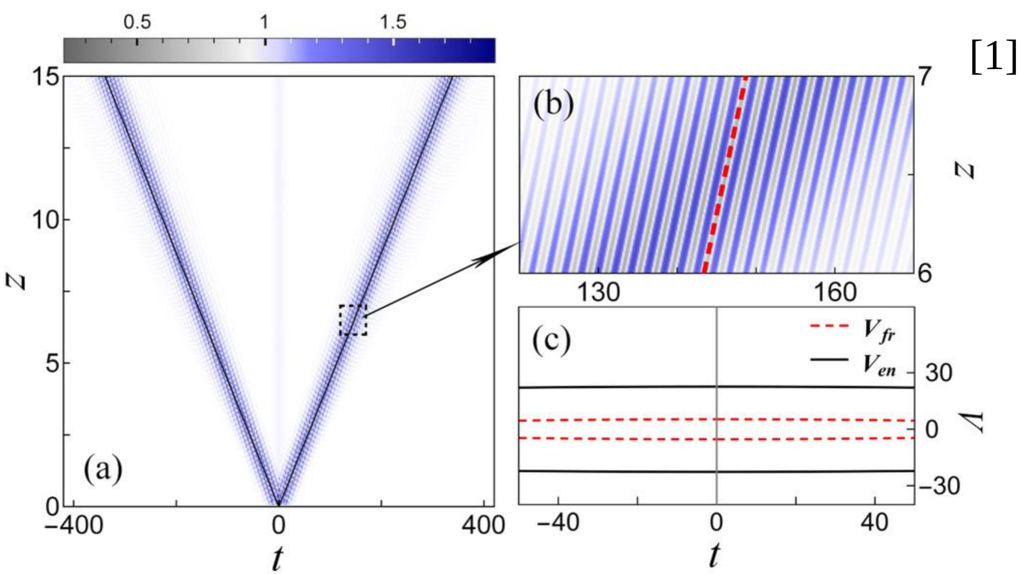
其中 $M=-\beta_4\left(12+12\omega^2\tau^2+\omega^4\tau^4\right)$，$N=24\sigma a_0^2\tau^4$ 。

[上标（±）代表其对应的p_z表达式前面的符号取正号或负号。]

5. 非线性波的可控激发

对局域包络和条纹速度的预测

下图(a)和(b)中的黑色实线和红色虚线分别代表局域包络速度 $V_{\mathrm{en0}}^{\pm}$ 和条纹速度 $V_{\mathrm{fr0}}^{\pm}$ 的预测结果，这与数值结果吻合的很好。



$$\boxed{\beta_4 = -5,\ \sigma = 1,\ a_0 = 1,\ a = 1,\ \omega = 3,\ \text{and}\ \tau = 15}$$

[1] P. Gao, C. Liu, L. C. Zhao, Z. Y. Yang, and W. L. Yang, Phys. Rev. E 102, 022207 (2020).

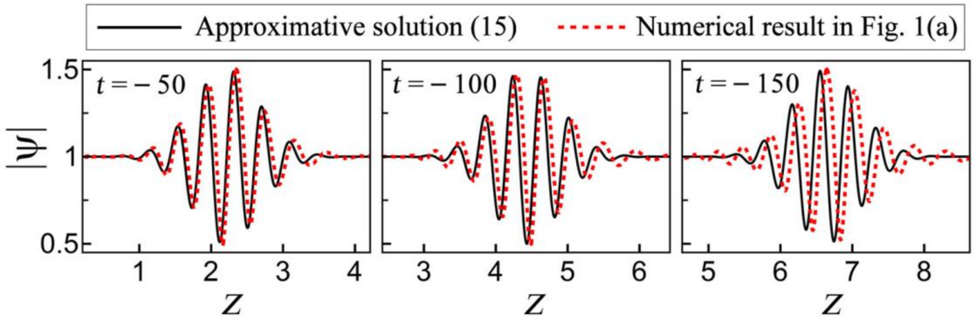
5. 非线性波的可控激发

类孤立包络的近似解

上面展示的两个波在传播过程中具有稳定的包络截面，因此它们可以看做是两个类孤立包络。基于它们的各个特征，我们可以构造一个**近似解**去描述它们：

$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{aprx}}(z,t) = \psi_0\Bigg[1 &+ \frac{a}{2}L(t - V_{\mathrm{en0}}^{+}z)\cos\omega(t - V_{\mathrm{fr0}}^{+}z) \\ &+ \frac{a}{2}L(t - V_{\mathrm{en0}}^{-}z)\cos\omega(t - V_{\mathrm{fr0}}^{-}z)\Bigg].\end{aligned} \tag{15}$$

下图为近似解和数值模拟给出的演化截面对比：



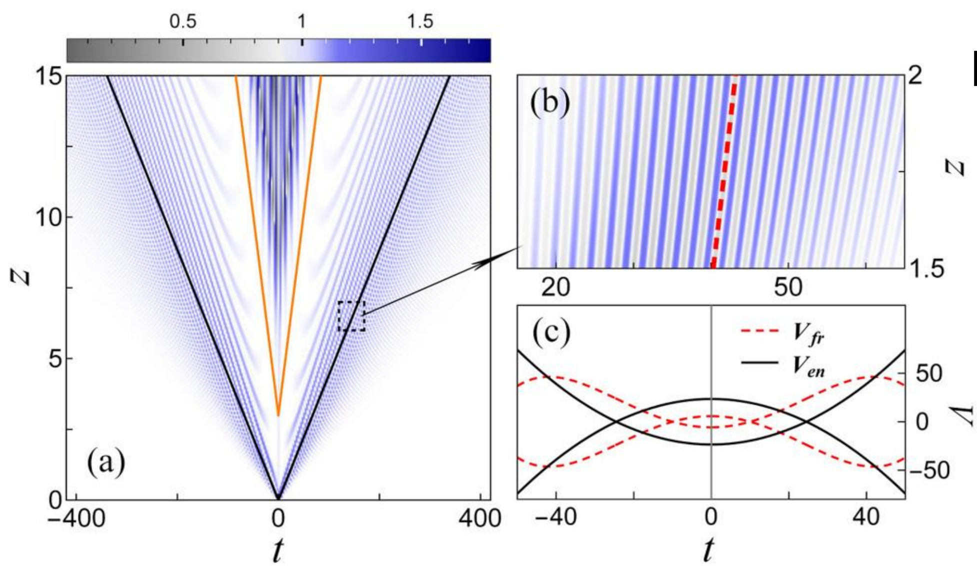
[1]

[1] P. Gao, C. Liu, L. C. Zhao, Z. Y. Yang, and W. L. Yang, Phys. Rev. E 102, 022207 (2020).

5. 非线性波的可控激发

色散波的动力学

当扰动宽度从15缩小到4的时候，两个色散波出现了。下图(a)和(b)中的黑色实线和红色虚线分别代表局域包络速度和条纹速度的预测结果



[1]

$\beta_4 = -5, \sigma = 1, a_0 = 1, a = 1, \omega = 3$, and $\tau = 4$

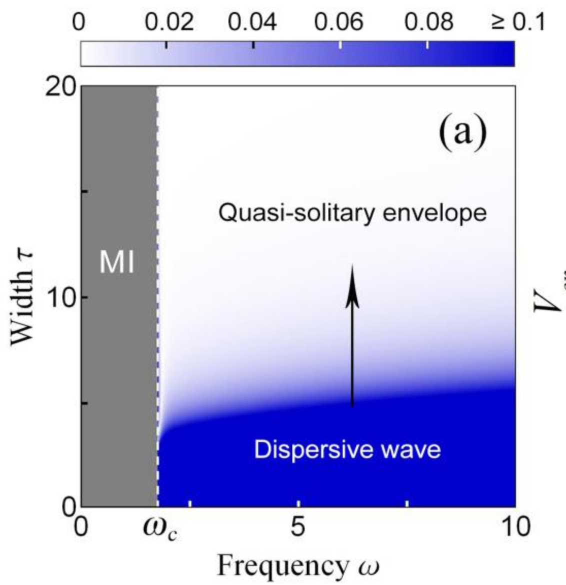
(橙色实现代表自发振荡的边界速度V_{wdg}。)

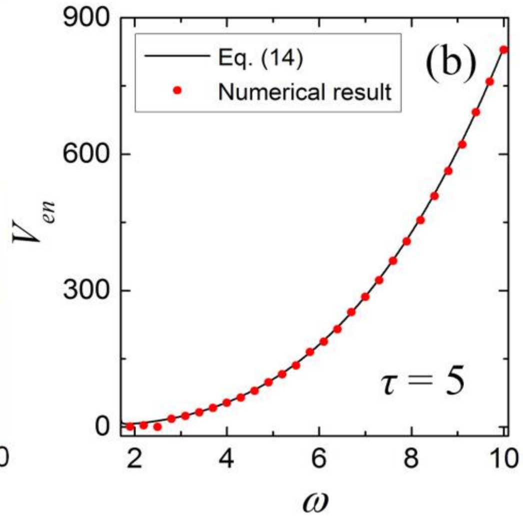
[1] P. Gao, C. Liu, L. C. Zhao, Z. Y. Yang, and W. L. Yang, Phys. Rev. E 102, 022207 (2020).

5. 非线性波的可控激发

类孤立包络和色散波之间的转换

条纹速度的不均匀程度δ由在$t=0$处 $\partial^2 V_{\mathrm{fr}}/\partial t^2$ 的绝对值所定义，它对色散波的色散程度有着直接的影响。





$\beta_4 = -5,$
$\sigma = 1,$
$a_0 = 1,$
$a = 1$

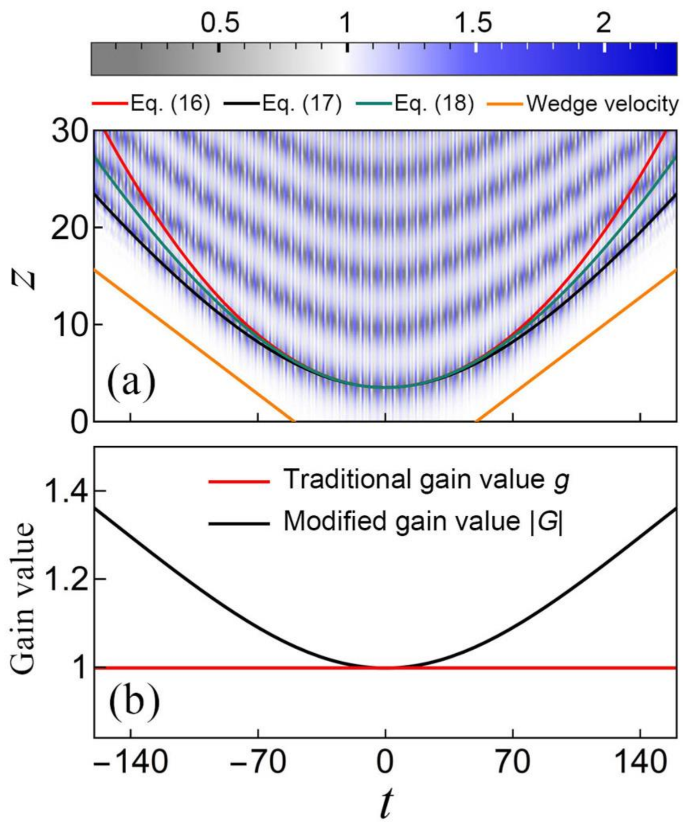
Fig. (a): 波的动力学特征分布.

Fig. (b): 局域包络速度的预测.

[1] P. Gao, C. Liu, L. C. Zhao, Z. Y. Yang, and W. L. Yang, Phys. Rev. E 102, 022207 (2020).

5. 非线性波的可控激发

预测由调制不稳定性所诱发的第一排峰的相对位置



[1]

$\beta_4=-5$, $\sigma=1$, $a_0=1$, $a=0.1$, $\omega=1.5$, and $\tau=30$

在 [*Opt. Lett. 43, 5291 (2018)*] 中的定律:

$$Z_n(T_n)=Z_0+\frac{T_n^2}{g\tau^2} \tag{16}$$

在引入改进的增益值之后，这一定律变为

$$Z_n(T_n)=\frac{|G(0)|}{|G(T_n)|}Z_0+\frac{T_n^2}{|G(T_n)|\tau^2} \tag{17}$$

直接对速度进行积分得到位置:

$$Z_n(T_n)=Z_0+\int_{T_0}^{T_n}\frac{1}{V_{\mathrm{en}}(t)}\,dt \tag{18}$$

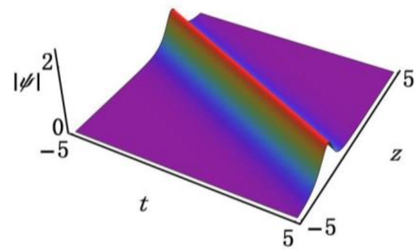
($T_n=2\pi n/\omega$ 和 Z_n 分别代表第n个峰的时间和空间坐标。 Z_0 代表中心峰的空间坐标。)

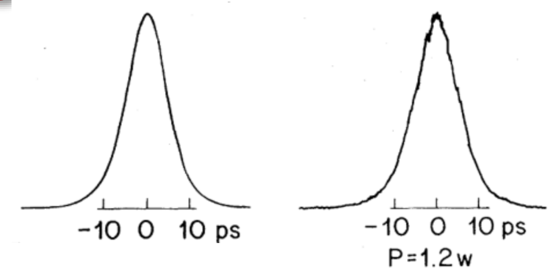
[1] P. Gao, C. Liu, L. C. Zhao, Z. Y. Yang, and W. L. Yang, Phys. Rev. E 102, 022207 (2020).

5. 非线性波的可控激发

在光纤中已经激发出的非线性波

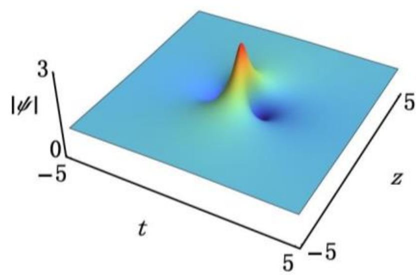
亮孤子:

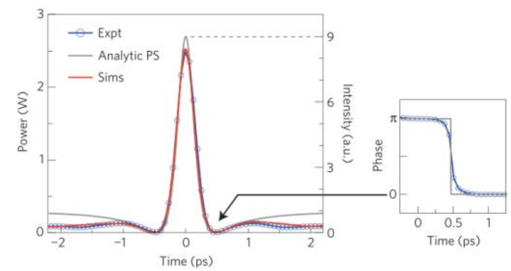




Phys. Rev. Lett. 45, 1095 (1980)

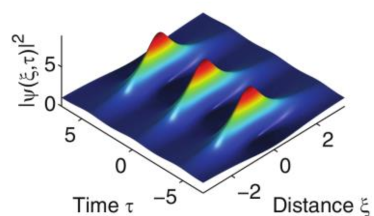
Peregrine 怪波:

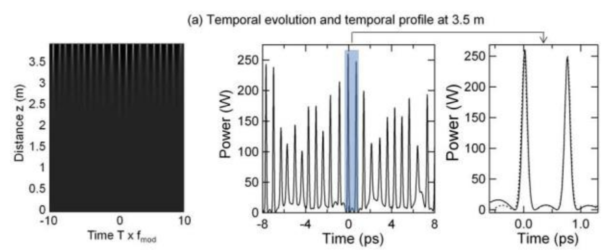




Nat. Phys. 6, 790 (2010)

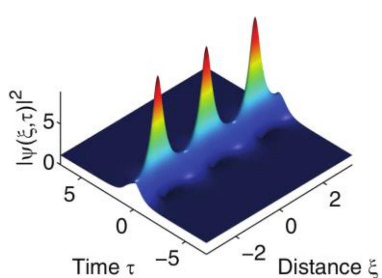
Akhmediev 呼吸子:

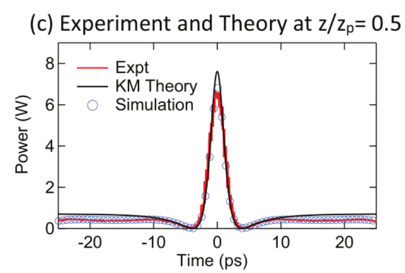




Opt. Express 17, 21497 (2009)

Kuznetsov 呼吸子:





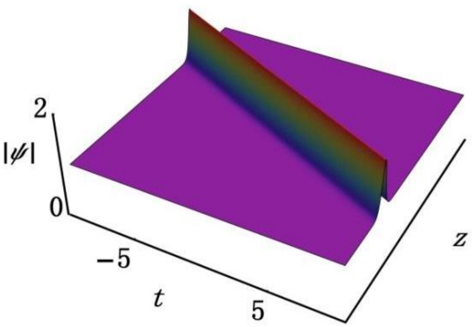
Sci. Rep. 2, 463 (2012)

5. 非线性波的可控激发

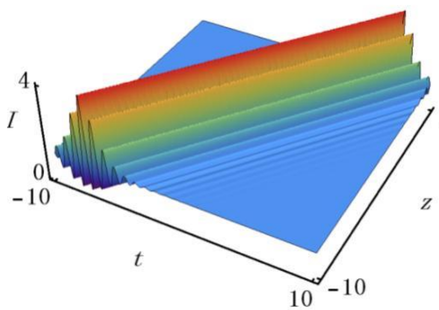
更多种类的非线性波

更多种类的非线性波存在于高阶模型之中。

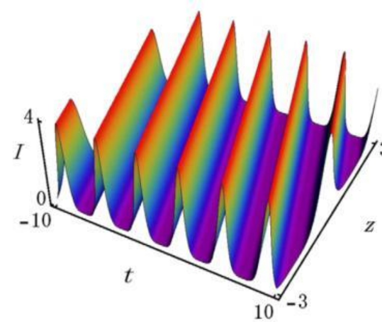
单峰孤子:



多峰孤子:



稳定的周期波:



高阶模型

Sasa-Satsuma 模型

$$iE_z+\frac{1}{2}E_{tt}+|E|^2E+i\epsilon[E_{ttt}+3(|E|^2E)_t+3|E|^2E_t]=0$$

Hirota 模型

$$iE_z+\frac{1}{2}E_{tt}+|E|^2E-i\beta(E_{ttt}+6|E|^2E_t)=0$$

这些模型是复杂的，因此在真实的光纤中去激发这些波是较为困难的。

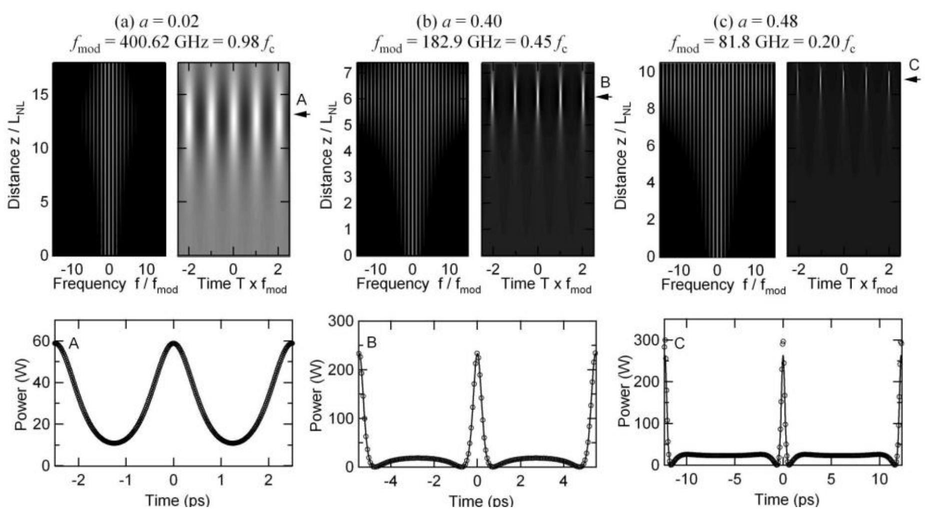
如何在真实的光纤中激发它们?

5. 非线性波的可控激发

非线性波的激发机制

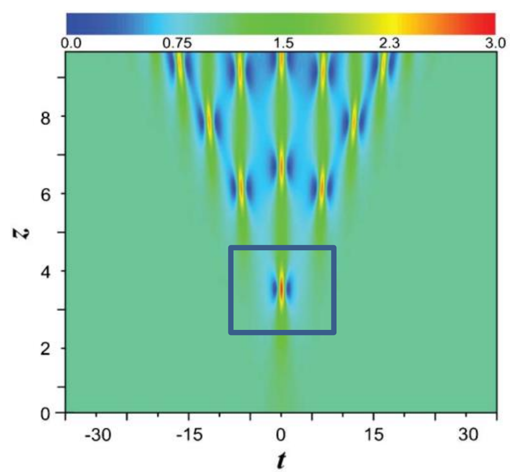
人们已经对非线性波的激发机制进行了研究。借助传统的线性稳定性分析给出的**增益值**分布，可以实现对**Akhmediev呼吸子**和**Peregrine怪波**激发的控制。

从周期扰动出发:



[1]

从局域扰动出发:



(a)

[2]

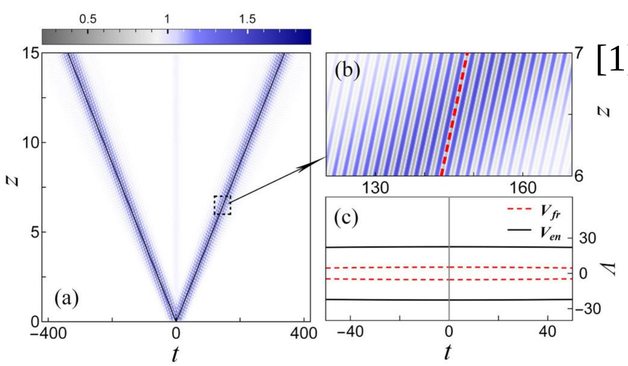
[1] J. M. Dudley, G. Genty, F. Dias, B. Kibler, and N. Akhmediev, Opt. Express 17, 21497 (2009).
[2] L. C. Zhao and L. Ling, J. Opt. Soc. Am. B 33, 850 (2016).

5. 非线性波的可控激发

非线性波的激发机制

然而，想要操控更多种类的波激发，仅有增益值是不够的，还需要知道其它的特征。

周期性　　局域性　　速度



[1]

改进的线性稳定性分析

它使得在真实光纤中激发更多种类的波变得可能。

[1] P. Gao, C. Liu, L. C. Zhao, Z. Y. Yang, and W. L. Yang, Phys. Rev. E 102, 022207 (2020).

5. 非线性波的可控激发

研究模型

Phys. Rev. A 103, 023519 (2021)

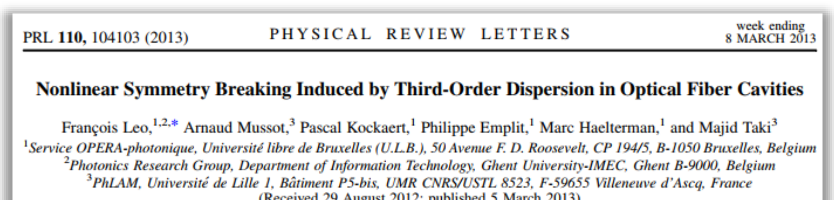
考虑三阶色散的影响，在带有反常群速色散的非线性光纤中光波的演化可以由以下方程描述：

$$\boxed{i\psi_z + \frac{1}{2}\psi_{tt} - \frac{i\beta_3}{6}\psi_{ttt} + |\psi|^2\psi = 0} \qquad (1)$$

β_3 —— 三阶色散的系数

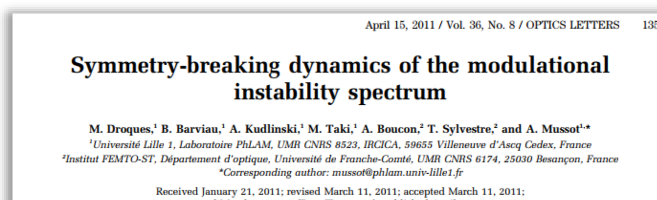
ψ —— 光场的慢变脉冲包络

色散位移光纤　（实验上已实现）


PRL 110, 104103 (2013) PHYSICAL REVIEW LETTERS week ending 8 MARCH 2013

Nonlinear Symmetry Breaking Induced by Third-Order Dispersion in Optical Fiber Cavities

François Leo,[1,2,*] Arnaud Mussot,[3] Pascal Kockaert,[1] Philippe Emplit,[1] Marc Haelterman,[1] and Majid Taki[3]
[1]*Service OPERA-photonique, Université libre de Bruxelles (U.L.B.), 50 Avenue F. D. Roosevelt, CP 194/5, B-1050 Bruxelles, Belgium*
[2]*Photonics Research Group, Department of Information Technology, Ghent University-IMEC, Ghent B-9000, Belgium*
[3]*PhLAM, Université de Lille 1, Bâtiment P5-bis, UMR CNRS/USTL 8523, F-59655 Villeneuve d'Ascq, France*
(Received 29 August 2012; published 5 March 2013)


April 15, 2011 / Vol. 36, No. 8 / OPTICS LETTERS 1359

Symmetry-breaking dynamics of the modulational instability spectrum

M. Droques,[1] B. Barviau,[1] A. Kudlinski,[1] M. Taki,[1] A. Boucon,[2] T. Sylvestre,[2] and A. Mussot[1,*]
[1]*Université Lille 1, Laboratoire PhLAM, UMR CNRS 8523, IRCICA, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France*
[2]*Institut FEMTO-ST, Département d'optique, Université de Franche-Comté, UMR CNRS 6174, 25030 Besançon, France*
*Corresponding author: mussot@phlam.univ-lille1.fr
Received January 21, 2011; revised March 11, 2011; accepted March 11, 2011; posted March 16, 2011 (Doc. ID 141565); published April 8, 2011

5. 非线性波的可控激发

初始条件的设定

我们尝试一个带有如下形式的初始条件：

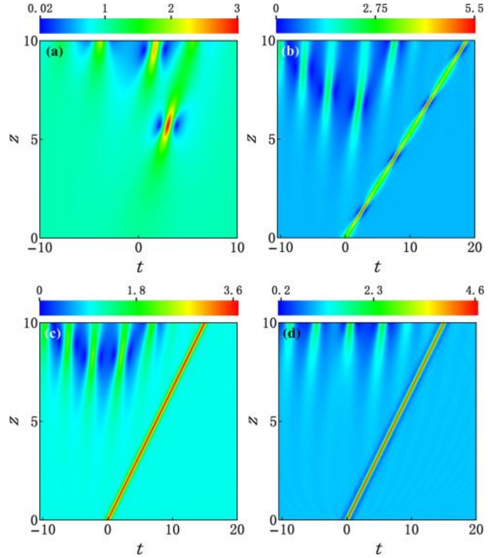
$$\boxed{\begin{aligned}\psi_p(0,t) &= [1+u(0,t)]\psi_0(0,t)\\ &= [1+(a_1e^{i\omega_p t}+a_2e^{-i\omega_p t})L(t)]a_0e^{i\omega_0 t}\end{aligned}}$$

ψ_0 —— 带有幅度 a_0 和频率 ω_0 的连续波背景

u —— 带有幅度 a_1, a_2 和频率 ω_p 的扰动

$L(t)$ —— 光滑的局域函数

这里我们令 $L(t) = \mathrm{sech}(\eta_p t)$，其中 $\eta_p \geq 0$ 衡量了函数的局域性程度。许多在可积模型的研究表明，sech型的初始扰动可以激发出更多标准的非线性波图样。



[1]

$$\psi(t,0) = [1+a\,\mathrm{sech}(ct)e^{i\varphi}]e^{i\theta}$$

[1] L. Duan, Z. Y. Yang, P. Gao, and W. L. Yang, Phys. Rev. E 99, 012216 (2019).

5. 非线性波的可控激发

改进的线性稳定性分析

一个被扰动的平面波解：

$$\psi_p(z,t) = [1 + u(z,t)]\psi_0(z,t) \tag{2}$$

线性化处理

$$0 = iu_z + a_0^2 u + a_0^2 u^* + \left(i\omega_0 + \frac{i\beta_3}{2}\omega_0^2\right)u_t + \left(\frac{1}{2} + \frac{\beta_3}{2}\omega_0\right)u_{tt} + \left(-\frac{i\beta_3}{6}\right)u_{ttt}. \tag{3}$$

扰动的形式

$$u(z,t) = Ae^{p(z,t)} + Be^{p^*(z,t)} \tag{4}$$

A和B*的非零解要求

$$M = -(p_t^2 + p_{tt})(1 + \beta_3\omega_0)$$
$$N = p_t^3 + p_{ttt} + 3p_t p_{tt} - 3\omega_0^2 p_t$$

$$\boxed{p_z = -\omega_0 p_t + \tfrac{1}{6}\beta_3 N \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{M\left(4a_0^2 - M\right)}} \tag{5}$$

5. 非线性波的可控激发

改进的线性稳定性分析

描述波的周期性、局域性、速度的六个函数：

	t 方向（初始设定）	z 方向	速度
周期性	$\omega=\mathrm{Im}[p_t]$	$K=-\mathrm{Im}[p_z]$	$V=K/\omega$
局域性	$\eta=\mathrm{Re}[p_t]$	$G=-\mathrm{Re}[p_z]$	$\Lambda=G/\eta$

它们都是关于t的函数，而不是常数，使用它们去调整波的特征是不方便的。

因此，我们对函数 f 引入下标（+ 或 −），其代表了 f 在 $t\to+\infty$ 或 $t\to-\infty$ 时的极限值:

$$\boxed{f_\pm=\lim_{t\to\pm\infty}f}$$

$$\omega_+=\omega_-=\omega_p$$
$$\eta_+=-\eta_-=-\eta_p$$

方便起见，在后面的讨论中我们只以 $t\to+\infty$ 为例去展示结果。

5. 非线性波的可控激发

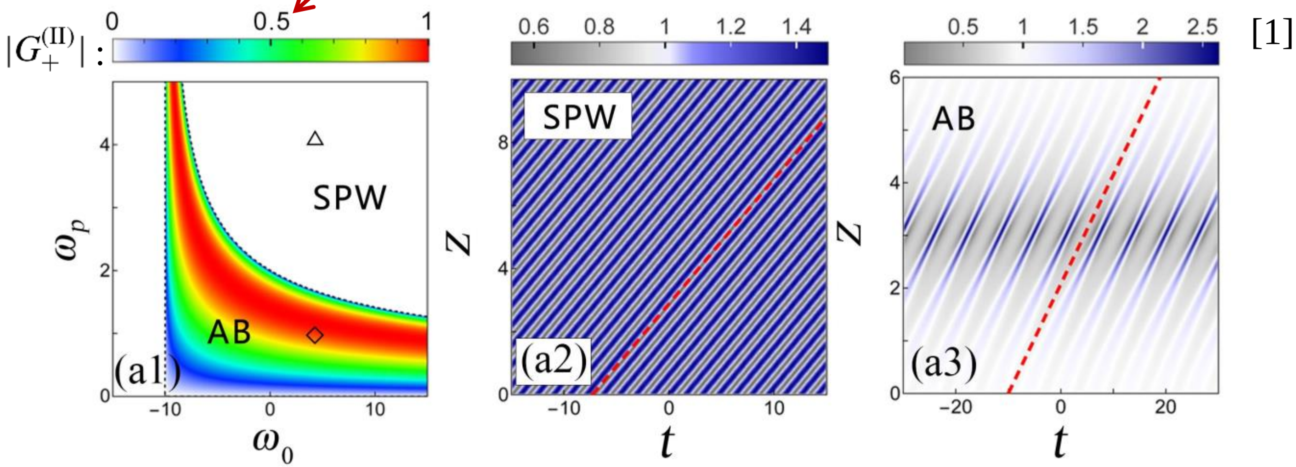
纯周期的初始扰动

$(\omega_p \neq 0, \eta_p = 0)$

初始条件： $\psi_p(0,t) = [1 + (a_1 e^{i\omega_p t} + a_2 e^{-i\omega_p t})\mathrm{sech}(\eta_p t)] a_0 e^{i\omega_0 t}$

稳定的周期波：	Stable periodic wave (SPW)	$G_+ = 0$
Akhmediev 呼吸子：	Akhmediev breather (AB)	$G_+ \neq 0$

$$G_+^{(\mathrm{II})} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\sqrt{\omega_p^2(1+\beta_3\omega_0)\left[4a_0^2 - \omega_p^2(1+\beta_3\omega_0)\right]}\right]$$



激发条件	△ SPW 激发	◇ AB 激发

[1] P. Gao, L. Duan, X. Yao, Z. Y. Yang, and W. L. Yang, Phys. Rev. A 103, 023519 (2021).

$(\beta_3 = 0.1, a_0 = 1)$

5. 非线性波的可控激发

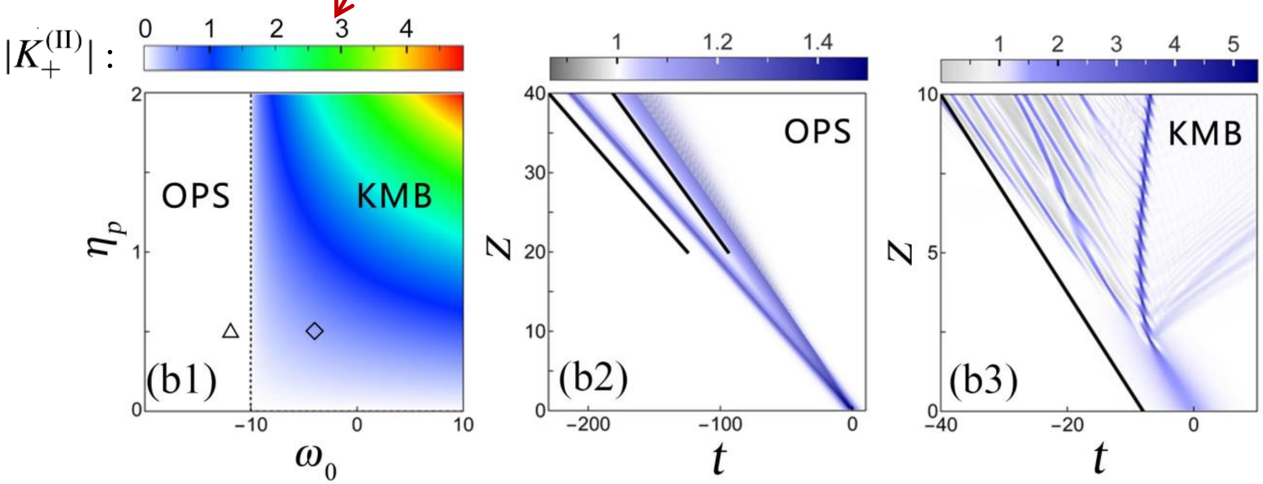
纯局域的初始扰动

$(\omega_p = 0, \eta_p \neq 0)$

初始条件： $\psi_p(0,t) = [1 + (a_1 e^{i\omega_p t} + a_2 e^{-i\omega_p t})\mathrm{sech}(\eta_p t)]a_0 e^{i\omega_0 t}$

单峰孤子：	One-peak soliton (OPS)	$K_+ = 0$
Kuznetsov-Ma 呼吸子：	Kuznetsov-Ma breather (KMB)	$K_+ \neq 0$

$$K_+^{(\mathrm{II})} = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\sqrt{-\eta_p^2(1+\beta_3\omega_0)\left[4a_0^2 + \eta_p^2(1+\beta_3\omega_0)\right]}\right]$$



[1]

激发条件 | △ OPS 激发 | ◇ KMB 激发

[1] P. Gao, L. Duan, X. Yao, Z. Y. Yang, and W. L. Yang, Phys. Rev. A 103, 023519 (2021).

$(\beta_3 = 0.1, a_0 = 1)$

5. 非线性波的可控激发

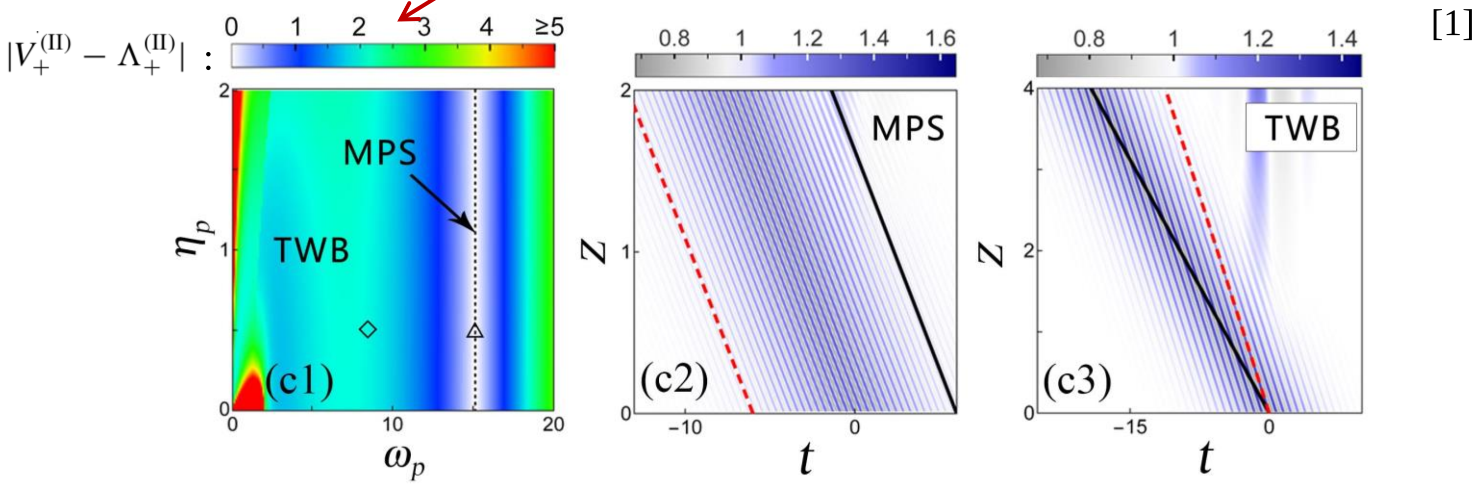
既周期又局域的初始扰动

$(\omega_p \neq 0, \eta_p \neq 0)$

初始条件： $\psi_p(0,t) = [1 + (a_1 e^{i\omega_p t} + a_2 e^{-i\omega_p t})\mathrm{sech}(\eta_p t)]a_0 e^{i\omega_0 t}$

多峰孤子：	Multi-peak soliton (MPS)	$V_+ = \Lambda_+$
Taijiri-Watanabe 呼吸子：	Taijiri-Watanabe breather (TWB)	$V_+ \neq \Lambda_+$

$$V_+^{(\mathrm{II})} = \omega_0 + \frac{\beta_3}{6}(\omega_p^2 - 3\eta_p^2 + 3\omega_0^2) + \frac{\mathrm{Im}[\sqrt{-P(4a_0^2+P)}]}{2\omega_p}, \quad \Lambda_+^{(\mathrm{II})} = \omega_0 + \frac{\beta_3}{6}(3\omega_p^2 - \eta_p^2 + 3\omega_0^2) - \frac{\mathrm{Re}[\sqrt{-P(4a_0^2+P)}]}{2\eta_p}$$



[1]

激发条件	△ MPS 激发	◇ TWB 激发

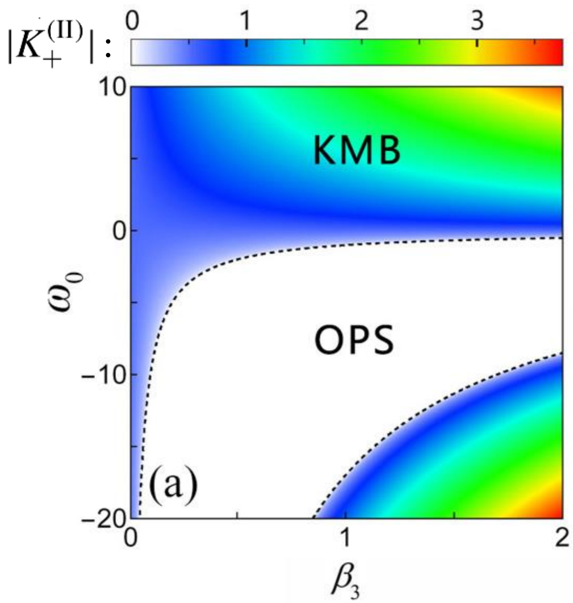
[1] P. Gao, L. Duan, X. Yao, Z. Y. Yang, and W. L. Yang, Phys. Rev. A 103, 023519 (2021).

$(\beta_3 = 0.1, a_0 = 1)$

5. 非线性波的可控激发

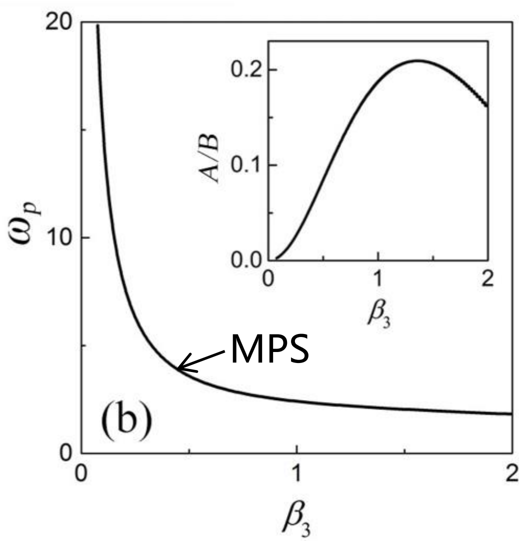
三阶色散的影响

对于单峰孤子（OPS）激发的影响：



[1]

对于单峰孤子（MPS）激发的影响：



[1]

当 $\beta_3 \to 0$时，想要满足OPS和MPS的激发条件变得越来越困难。

这就是在标准非线性薛定谔模型中无法激发OPS和MPS的原因。

[1] P. Gao, L. Duan, X. Yao, Z. Y. Yang, and W. L. Yang, Phys. Rev. A 103, 023519 (2021).

5. 非线性波的可控激发

单峰和多峰孤子激发的实验可行性

我们参考文献[1]中色散位移光纤的实验参数，同时引入了光纤损耗。

带有量纲的模型：
$$\boxed{iA_Z - \frac{\beta^{(2)}}{2}A_{TT} - \frac{i\beta^{(3)}}{6}A_{TTT} + \gamma|A|^2A + i\frac{\alpha}{2}A = 0}$$

群速度色散、三阶色散、自相位调制、光纤损耗的系数分别为

$$\beta^{(2)} = -0.86\ \mathrm{ps}^2/\mathrm{km},\ \beta^{(3)} = 0.12\ \mathrm{ps}^3/\mathrm{km},\ \gamma = 2.4\ \mathrm{W}^{-1}\mathrm{km}^{-1},\ \alpha = 0.2\ \mathrm{dB}/\mathrm{km}.$$

在有量纲和无量纲的模型之间存在如下变换：

$$A = \sqrt{P_0}\psi,\quad T = [|\beta^{(2)}|/(\gamma P_0)]^{1/2}t,\quad Z = (\gamma P_0)^{-1}z$$

[1] M. Droques, B. Barviau, A. Kudlinski, M. Taki, A. Boucon, T. Sylvestre, and A. Mussot, Opt. Lett. 36, 1359 (2011).

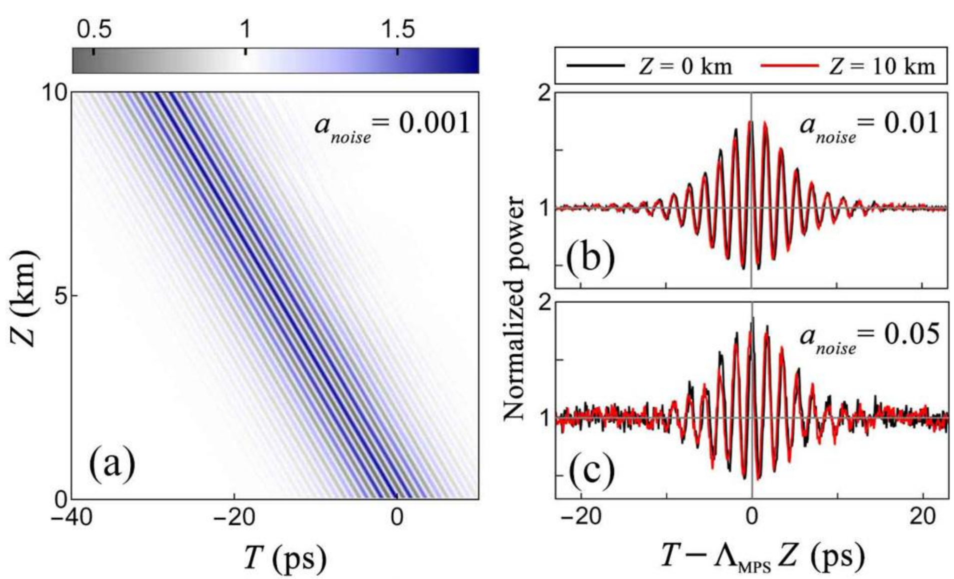
5. 非线性波的可控激发

单峰和多峰孤子激发的实验可行性

初始条件： $A_p(0,T)=\sqrt{P_0}e^{i\Omega_0 T}[1+(A_1e^{i\Omega_p T}+A_2e^{-i\Omega_p T})\mathrm{sech}(T/T_p)]$

引入随机噪声： $A_{\mathrm{noise}}(0,T)=A_p(0,T)(1+a_{\mathrm{noise}}\mathrm{Random}[-1,1])$

MPS:



[1]

$f_0=\Omega_0/2\pi=-840.769$ GHz	$A_1=0.03$	$T_p=3.786$ ps
$f_p=\Omega_p/2\pi=555.988$ GHz	$A_2=0.3$	$P_0=0.1$ W

[1] P. Gao, L. Duan, X. Yao, Z. Y. Yang, and W. L. Yang, Phys. Rev. A 103, 023519 (2021).

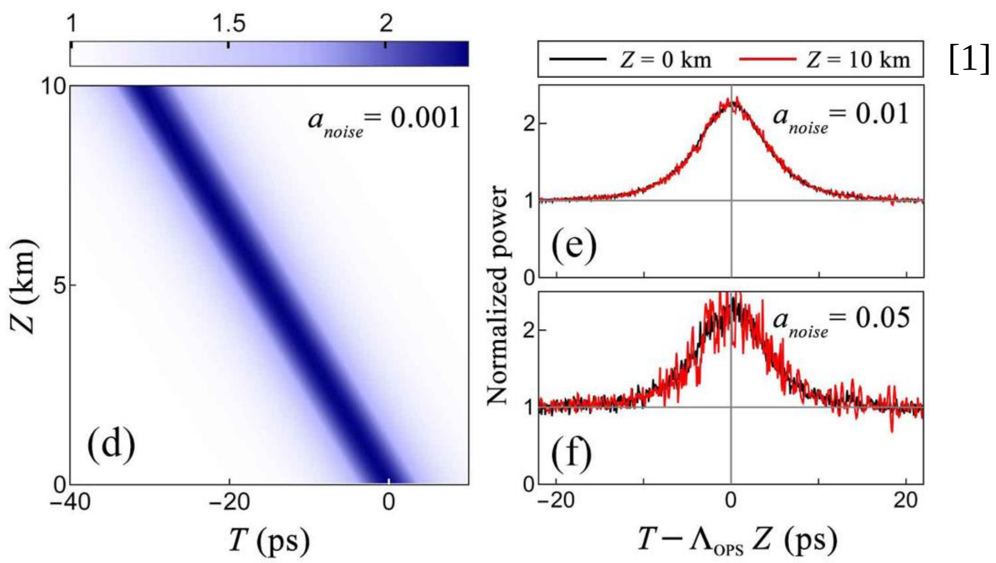
5. 非线性波的可控激发

单峰和多峰孤子激发的实验可行性

初始条件: $A_{loc}(0,T)=\sqrt{P_0}e^{i\Omega_0 T}[1+A_{12}\mathrm{sech}(T/T_p)]$

引入随机噪声: $A_{\mathrm{noise}}(0,T)=A_p(0,T)(1+a_{\mathrm{noise}}\mathrm{Random}[-1,1])$

OPS:



$A_{12}=0.5$ $\quad P_0=0.1$ W

$T_p=3.786$ ps $\quad f_0=\Omega_0/2\pi=-1140.8$ GHz

[1] P. Gao, L. Duan, X. Yao, Z. Y. Yang, and W. L. Yang, Phys. Rev. A 103, 023519 (2021).

5. 非线性波的可控激发

这六种非线性波的激发条件

通过以上分析，我们将六种非线性波的激发条件总结如下：

[1]

Fundamental waves	Generation conditions
Stable periodic wave (SPW)	$\omega_+ \neq 0,\ \eta_+ = 0,\ G_+ = 0$
Akhmediev breather (AB)	$\omega_+ \neq 0,\ \eta_+ = 0,\ G_+ \neq 0$
One-peak soliton (OPS)	$\omega_+ = 0,\ \eta_+ \neq 0,\ K_+ = 0$
Kuznetsov-Ma breather (KMB)	$\omega_+ = 0,\ \eta_+ \neq 0,\ K_+ \neq 0$
Multi-peak soliton (MPS)	$\omega_+ \neq 0,\ \eta_+ \neq 0,\ V_+ = \Lambda_+$
Taijiri-Watanabe breather (TWB)	$\omega_+ \neq 0,\ \eta_+ \neq 0,\ V_+ \neq \Lambda_+$

[1] P. Gao, L. Duan, X. Yao, Z. Y. Yang, and W. L. Yang, Phys. Rev. A 103, 023519 (2021).

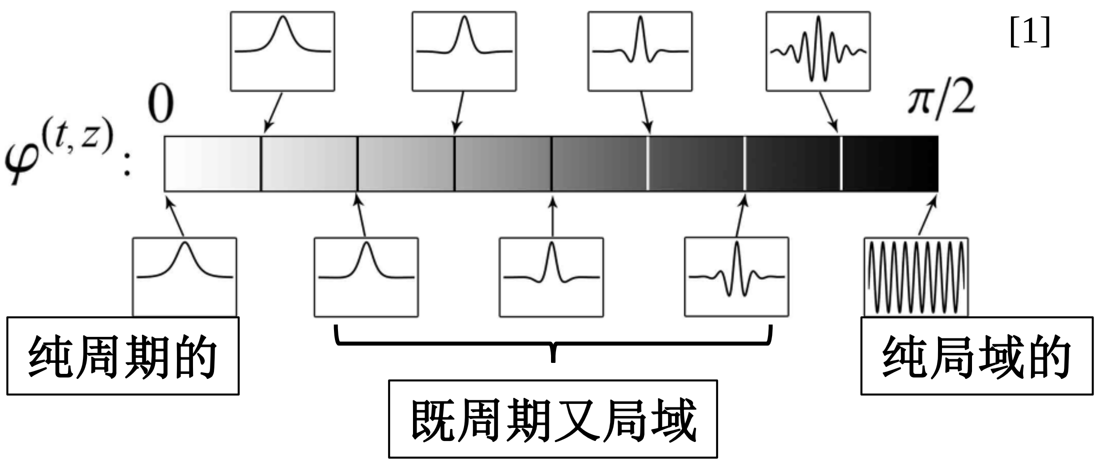
5. 非线性波的可控激发

周期性和局域性

我们定义两个特征量：

$$\varphi^{(t)} = \tan^{-1}\left[\frac{|\omega_+|}{|\eta_+|}\right], \quad \varphi^{(z)} = \tan^{-1}\left[\frac{|K_+|}{|G_+|}\right] \qquad (0 \leqslant \varphi^{(t,z)} \leqslant \pi/2)$$

去分别描述在t和z方向上波的周期性和局域性的混合程度。



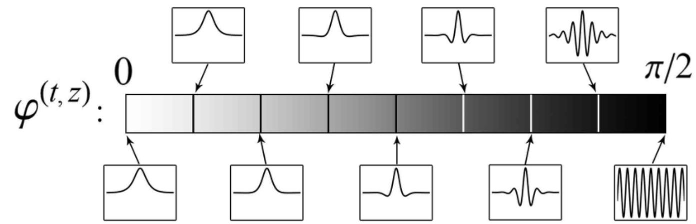
[1] P. Gao, L. Duan, X. Yao, Z. Y. Yang, and W. L. Yang, Phys. Rev. A 103, 023519 (2021).

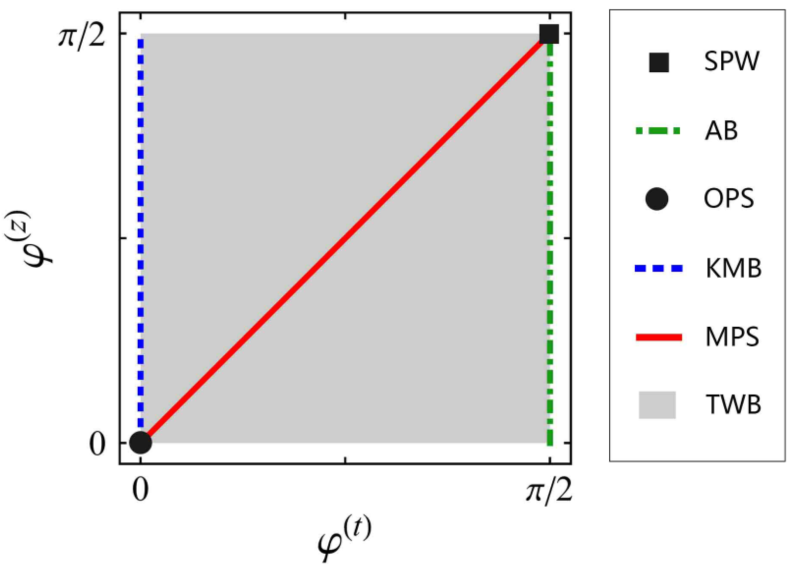
5. 非线性波的可控激发

波的特征条件

这六种波的激发条件可以转换为它们的特征条件：

Fundamental waves	Generation conditions
Stable periodic wave (SPW)	$\omega_+ \neq 0, \eta_+ = 0, G_+ = 0$
Akhmediev breather (AB)	$\omega_+ \neq 0, \eta_+ = 0, G_+ \neq 0$
One-peak soliton (OPS)	$\omega_+ = 0, \eta_+ \neq 0, K_+ = 0$
Kuznetsov-Ma breather (KMB)	$\omega_+ = 0, \eta_+ \neq 0, K_+ \neq 0$
Multi-peak soliton (MPS)	$\omega_+ \neq 0, \eta_+ \neq 0, V_+ = \Lambda_+$
Taijiri-Watanabe breather (TWB)	$\omega_+ \neq 0, \eta_+ \neq 0, V_+ \neq \Lambda_+$





[1]

[1] P. Gao, L. Duan, X. Yao, Z. Y. Yang, and W. L. Yang, Phys. Rev. A 103, 023519 (2021).

Thank you!