张量分解

2023/03/29　　马滟青

I、定义

- 考虑积分：

$$f^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}}(p_1,\cdots,p_E) \equiv \int\left(\prod_{i=1}^{L} d^D l_i\right)\mathcal{O}(p_1,\cdots,p_E)\,\underbrace{l_1^{\mu_{11}}\cdots l_1^{\mu_{1\beta_1}}\,l_2^{\mu_{21}}\cdots l_2^{\mu_{2\beta_2}}\cdots l_L^{\mu_{L1}}\cdots l_L^{\mu_{L\beta_L}}}_{\equiv\, T_\beta^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}}} \quad\cdots(1)$$

其中$\mathcal{O}$依赖于矢量$p_1^\mu,\cdots,p_E^\mu$，且积分结果为$\beta=\beta_1+\cdots+\beta_L$阶D维张量。注意：对称群可以是Lorentz群，也可以是其它转动群（如SO(3)），我们用$g^{\mu\nu}$表示其度规张量。

- 举例1：

$$f^{\mu\nu} \equiv \int d^D l\,\frac{l^\mu l^\nu}{l^2(l+p_1)^2(l+p_2)^2}$$

由于结果是2阶D维张量，必然有：

$$f^{\mu\nu} = a_1 g^{\mu\nu} + a_2 p_1^\mu p_1^\nu + a_3 p_1^\mu p_2^\nu + a_4 p_2^\mu p_1^\nu + a_5 p_2^\mu p_2^\nu$$

用$\{g^{\mu\nu}, p_1^\mu p_1^\nu, p_1^\mu p_2^\nu, p_2^\mu p_1^\nu, p_2^\mu p_2^\nu\}$分别与两边收缩（上下指标来区分，对于Lorentz群累式认重复指标必然是一个上、一个下），可得到5个线性方程组，从然求解出$a_1,\cdots,a_5$用标量积分（如$p_1^\mu p_1^\nu f_{\mu\nu}$）表示。

5个线性方程组的求解代价比较大，有无更好方法？

注意 $f^{\mu\nu}$ 在 $\mu\leftrightarrow\nu$ 置换下不变，等式右边也应有相同的规律，

由此得到必须有 $a_3=a_4$. 从而

$$f^{\mu\nu}=a_1 g^{\mu\nu}+a_2 p_1^\mu p_1^\nu+a_3(p_1^\mu p_2^\nu+p_2^\mu p_1^\nu)+a_5 p_2^\mu p_2^\nu$$

：每项都有 $\mu\leftrightarrow\nu$ 对称性

只需求解4个耦合在一起的方程组。是否能脱耦合？

为此需要定义一组张量基 $T_\lambda^{\mu\nu}$，使其满足 $T_\lambda\cdot T_{\lambda'}=0$.

a) 假设 $p_1^2\neq0$，则可取如下正交规一矢量

$$\hat{p}_1^\mu\equiv\frac{1}{\sqrt{p_1^2}}p_1^\mu,\quad \hat{p}_2^\mu\equiv\left(p_2^\mu-\frac{p_1^\mu\, p_1\cdot p_2}{p_1^2}\right)\Big/\sqrt{p_2^2-\frac{(p_1\cdot p_2)^2}{p_1^2}}$$

$$\hat{g}^{\mu\nu}\equiv g^{\mu\nu}-\hat{p}_1^\mu\hat{p}_1^\nu-\hat{p}_2^\mu\hat{p}_2^\nu$$

由此可得 $\hat{p}_i\cdot\hat{p}_j=\delta_{ij}$，$\hat{p}_i^\mu\hat{g}_{\mu\nu}=0$。用这些量进行张量展开得：

$$f^{\mu\nu}=b_1\hat{g}^{\mu\nu}+b_2\hat{p}_1^\mu\hat{p}_1^\nu+b_3(\hat{p}_1^\mu\hat{p}_2^\nu+\hat{p}_2^\mu\hat{p}_1^\nu)+b_5\hat{p}_2^\mu\hat{p}_2^\nu$$

可得4个方程组：

$$\hat{g}^{\mu\nu}f_{\mu\nu}=b_1(D-2)\qquad (\hat{p}_1^\mu\hat{p}_2^\nu+\hat{p}_2^\mu\hat{p}_1^\nu)f_{\mu\nu}=b_3*2$$

$$\hat{p}_1^\mu\hat{p}_1^\nu f_{\mu\nu}=b_2\qquad \hat{p}_2^\mu\hat{p}_2^\nu f_{\mu\nu}=b_5$$

可见方程组直接脱耦，得到最终结果。

b) 若 $p_1^2=p_2^2=0$，可取 $\hat{p}_1^\mu=(p_1^\mu+p_2^\mu)/\sqrt{2p_1p_2}$，$\hat{p}_2^\mu=(p_1^\mu-p_2^\mu)/\sqrt{2p_1p_2}$，其它完全相同。
5 a)

· 举例2：

$$f^{\mu_{11}\cdots\mu_{22}} \equiv \int d^D l_1\, d^D l_2 \frac{l_1^{\mu_{11}}\cdots l_1^{\mu_{14}}\, l_2^{\mu_{21}}\, l_2^{\mu_{22}}}{l_1^2\, l_2^2\, \left[(l_1+l_2)^2-m^2\right]}$$

由于结果是6阶张量，且无独立动量，可得分解：

$$\begin{aligned} f^{\mu_{11}\cdots\mu_{22}} = {} & a_1 g^{\mu_{11}\mu_{12}} g^{\mu_{13}\mu_{14}} g^{\mu_{21}\mu_{22}} + a_2 g^{\mu_{11}\mu_{12}} g^{\mu_{13}\mu_{21}} g^{\mu_{14}\mu_{22}} + a_3 g^{\mu_{11}\mu_{12}} g^{\mu_{13}\mu_{22}} g^{\mu_{14}\mu_{21}} \\ & + a_4 g^{\mu_{11}\mu_{13}} \qquad a_5 \qquad a_6 \\ & + a_7 g^{\mu_{11}\mu_{14}} \qquad a_8 \qquad a_9 \\ & + a_{10} g^{\mu_{11}\mu_{21}} \qquad a_{11} \qquad a_{12} \\ & + a_{13} g^{\mu_{11}\mu_{22}} \qquad a_{14} \qquad a_{15} \end{aligned}$$

可见展开项数非常之多！

注意到此积分有 $\{\mu_{11},\mu_{12},\mu_{13},\mu_{14}\}$ 的置换对称性，且有 $\{\mu_{21},\mu_{22}\}$ 的置换对称性，即有 $S_4\times S_2$ 的对称性，可以得出 a_i 之间的关系。

实际上，我们将发现其只有两个独立的(a_1 和 a_2)，即

$$f^{\mu_{11}\cdots\mu_{22}} = a_1 T_1^{\mu_{11}\cdots\mu_{22}} + a_2 T_2^{\mu_{11}\cdots\mu_{22}}$$，T_λ 是 $\overbrace{g^{\cdots}g^{\cdots}g^{\cdots}}^{\text{很多项}}$ 的和

为了得到 a_1 和 a_2，有方程组(无法脱耦)

$$\begin{cases} T_1\cdot f = a_1\, T_1\cdot T_1 + a_2\, T_1\cdot T_2 \\ T_2\cdot f = a_1\, T_2\cdot T_1 + a_2\, T_2\cdot T_2 \end{cases}$$ 需计算 $T_\lambda\cdot f$ 及 $T_\lambda\cdot T_{\lambda'}$，也不是很容易

- 例3：三维空间角积分

$$f^{ijk}=\int d\Omega \frac{\hat{e}^i\hat{e}^j\hat{e}^k}{(\hat{e}\cdot q+1)(q^2+0)}$$

$\hat{e}^1=(\sin\theta\sin\varphi,0,0)$

$\hat{e}^2=(\sin\theta,\ \sin\theta\cos\varphi,\ 0)$

$\hat{e}^3=(0,\ 0,\ \cos\theta)$

$d\Omega=\sin\theta d\theta d\varphi$

令 $n^i=\hat{e}^i$，$n\cdot n=1$

$$f^{ijk}=\int d^3n\ \delta(|n|-1)\frac{n^in^jn^k}{(n\cdot q+1)(q^2+0)}$$

正交归一基：$\hat{q}^i\equiv q^i/\sqrt{q^2}$，$\hat{\delta}^{ij}\equiv\delta^{ij}-\hat{q}^i\hat{q}^j$

$$\Rightarrow f^{ijk}=a\hat{q}^i\hat{q}^j\hat{q}^k+b\hat{q}^i\hat{\delta}^{jk}+c\hat{q}^j\hat{\delta}^{ik}+d\hat{q}^k\hat{\delta}^{ij}$$

$$\overset{\text{对称性}}{=\!=\!=}a\hat{q}^i\hat{q}^j\hat{q}^k+b(\hat{q}^i\hat{\delta}^{jk}+\hat{q}^j\hat{\delta}^{ik}+\hat{q}^k\hat{\delta}^{ij})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=\hat{q}^i\hat{q}^j\hat{q}^kf^{ijk}\\3b=(\hat{q}^i\hat{\delta}^{jk}+\hat{q}^j\hat{\delta}^{ik}+\hat{q}^k\hat{\delta}^{ij})f^{ijk}\end{cases}$$

· 例4：

$$f^\mu = \int d^D l \frac{l^\mu}{(l^2-m^2)(l+p)^2}, \quad p^2=0$$

分解可得：

$$f^\mu = a p^\mu$$

但无法通过两边乘以 p^μ 求解 a，因为 $p^2=0$。

考虑令 $p^2 \neq 0$，最后取 $p^2\to 0$ 极限，得

$$a = \lim_{p^2\to 0}\frac{1}{p^2}p^\mu f_\mu = \lim_{p^2\to 0}\frac{1}{p^2}\int d^D l \frac{p\cdot l}{(l^2-m^2)(l+p)^2}$$

由于 p^μ 只能构成 p^2 项，而 $p^2\to 0$，可认为 $p^\mu\to 0$，可在被积函数水平上展开 p^μ：

$$\int d^D l \frac{p\cdot l}{(l^2-m^2)(l+p)^2} = \int d^D l \frac{p\cdot l}{(l^2-m^2)l^2}\frac{1}{\left(1+\frac{2l\cdot p+p^2}{l^2}\right)}$$

$$= \int d^D l \frac{p\cdot l}{(l^2-m^2)l^2}\left[1-\frac{2l\cdot p+p^2}{l^2}+\cdots\right]$$

其中"…"包含3个及以上 p^μ 最终无贡献

1：l^μ 的奇函数为0，

p^2：3个 p^μ，无贡献

$$\Rightarrow a = \lim_{p^2\to 0}\frac{-2}{p^2}\int d^D l \frac{(l\cdot p)^2}{(l^2-m^2)l^4}$$

故可见需要再次进行张量分解.

更好方式是从最开始就进行展开:

$$f^{\mu}=\int d^D l\,\frac{l^{\mu}}{(l^2-m^2)\,l^2}\left[1-\frac{2l\cdot p}{l^2}+\cdots\right]$$

$$=-2\int d^D l\,\frac{l^{\mu}\,l\cdot p}{(l^2-m^2)\,l^4}$$

这个结果做为张量分解的出发点。

令 $\int d^D l\,\frac{l^{\mu}l^{\nu}}{(l^2-m^2)\,l^4}=a\,g^{\mu\nu}\Rightarrow a=\frac{1}{D}\int d^D l\,\frac{1}{(l^2-m^2)\,l^2}$

$$\Rightarrow f^{\mu}=\frac{-2}{D}\int d^D l\,\frac{p^{\mu}}{(l^2-m^2)\,l^2}$$

II. 一般性分解

$$f_{\beta}^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}}(p_1,\cdots,p_E)=\sum_{\lambda\in\{\text{单项张量}\}}a_{\lambda}(p_1,\cdots,p_E)\,M_{\lambda}^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}}(p_1,\cdots,p_E)\quad\cdots(2)$$

其中 $M_{\lambda}^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}}$ 为单项张量, 如 $p_1^{\mu_{11}}\cdots p_1^{\mu_{L\beta_L}}$, $g^{\mu_{11}\mu_{12}}p_2^{\mu_{13}}\cdots p_3^{\mu_{L\beta_L}}$ 等

a_{λ} 为 $p_1,\cdots,p_E$ 的标量。

由于 $f^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}}$ 在 $\mu_{ij}\leftrightarrow\mu_{ik}$ 交换下不变, 即它在

$$G\equiv S_{\beta_1}\times S_{\beta_2}\times\cdots\times S_{\beta_L}$$

的对称群变换下不变, 故(2)式右边也需要满足

这一~~性质~~对称性。

- 从任何单项张量 $M_\lambda^{\mu_{11}\cdots\mu_L\rho_L}$ 出发，在G的作用下，会产生一个轨道 $G M_\lambda^{\mu_{11}\cdots\mu_L\rho_L}$，~~且~~轨道中的每一个点都是最简的单项张量（$p_i^\mu$ 和 $g^{\mu\nu}$ 构成，系数为+1）。

由于 $\forall g\in G$ 有 $gG=G$，故得到

$$g\left(G M_\lambda^{\mu_{11}\cdots\mu_L\rho_L}\right) = G M_\lambda^{\mu_{11}\cdots\mu_L\rho_L} = G\left(g M_\lambda^{\mu_{11}\cdots\mu_L\rho_L}\right)$$

即在 $\forall g\in G$ 的作用下，是 $G M_\lambda^{\mu_{11}\cdots\mu_L\rho_L}$ 到自己的满映射

则从~~轨~~道上任意点出发会得到相同轨道。

- 令 $\#G=N_G$，则

$$\sum_{g\in G}\underbrace{g f_\beta^{\mu_{11}\cdots\mu_L\rho_L}}_{=f_\beta} = \sum_g \sum_{\lambda\in\{\text{单项}\}} a_\lambda\, g M_\lambda^{\mu_{11}\cdots\mu_L\rho_L}$$

$\boxed{K_\lambda\equiv\{g\mid g\in G, gM_\lambda=M_\lambda\}}$

迷向子群，$\#K_\lambda\equiv N_{K_\lambda}$

$$\Rightarrow f_\beta^{\mu_{11}\cdots\mu_L\rho_L} = \cancel{\frac{1}{N_G}}\sum_{\lambda\in\{\text{单项}\}} a_\lambda \frac{1}{N_G}\sum_g g M_\lambda^{\mu_{11}\cdots\mu_L\rho_L}$$

$$= \sum_{\lambda\in\{\text{单项}\}} a_\lambda \frac{\cancel{N_{K_\lambda}}}{N_G}\sum_{\lambda\text{轨道上的点}} G M_\lambda^{\mu_{11}\cdots\mu_L\rho_L}$$

其中利用了：

$N_G = N_{K_\lambda} * \underbrace{N_{\lambda\text{轨道上的点}}}_{\equiv N_\lambda}$

$$= \sum_{\lambda\in\{\text{等价类}\}} a_\lambda\, T_\lambda^{\mu_{11}\cdots\mu_L\rho_L}$$

其中 $T_\lambda^{\mu_{11}\cdots\mu_L\rho_L} = \sum_{\lambda\text{轨道上的点}} G M_\lambda^{\mu_{11}\cdots\mu_L\rho_L}$，且 $gT_\lambda = T_\lambda$

Ⅲ、轨道及每个轨道上的点数

· 定理：两个单项张量 M_λ 与 $M_{\lambda'}$ 在一个轨道的充要条件是 $M_\lambda \cdot F = M_{\lambda'} \cdot F$。

· 证明必要性：

若 $M_{\lambda'} = g M_\lambda$，则 $M_{\lambda'} \cdot F = (g M_\lambda) \cdot F = (g^{-1} g M_\lambda) \cdot (g^{-1} F) = M_\lambda \cdot F$，

其中利用了 $g^{-1} F = F$ 以及标量积不依赖哑指标的置换。

· 证明充分性：

若 $M_{\lambda'} \cdot F = M_\lambda \cdot F$，当 $p=0$，即 $M_{\lambda'}$ 为标时，必然有 $M_{\lambda'} = M_\lambda$。

假设 $p<n$ $(n \geq 1)$ 时定理成立，当 $p=n$ 时，分以下三种情况：

a) $e_i \cdot P_j$ 是 $M_\lambda \cdot F$ 中的一项，即 $M_{\lambda'}$ 和 M_λ 中分别有 $P_j^{\mu_{ir}}$ 和 $P_j^{\mu_{is}}$。

令 $g = \{\mu_{ir} \leftrightarrow \mu_{is}\}$ 的置换操作，则 $g M_\lambda$ 中有 $P_j^{\mu_{ir}}$ 项。

把去掉 F 中的 $e_i^{\mu_{ir}}$ 项后记为 $\tilde{F}$，去掉 $M_{\lambda'}$ 和 $g M_\lambda$ 中的 $P_j^{\mu_{ir}}$ 后分别记为 $\widetilde{M_{\lambda'}}$ 和 $\widetilde{g M_\lambda}$，则

$$\widetilde{M_{\lambda'}} \cdot \tilde{F} = \widetilde{g M_\lambda} \cdot \tilde{F}$$

其对称群为 $\tilde{G} = S_{p_1} \times \cdots \times S_{p_i - 1} \times \cdots \times S_{p_L}$。由归纳假设知

$\widetilde{M_{\lambda'}}$ 与 $\widetilde{g M_\lambda}$ 在一个轨道，即 $\widetilde{M_{\lambda'}} = g' \widetilde{g M_\lambda}$

$\Rightarrow M_{\lambda'} = g' g M_\lambda$，即在一个轨道。

b) l_i^2 是 $M_{\lambda'}\cdot F$ 中的一项，即 $M_{\lambda'}$ 和 M_λ 中分别有 $g^{\mu_{ir_1}\mu_{ir_2}}$ 和 $g^{\mu_{is_1}\mu_{is_2}}$。

令 $g=(\mu_{ir_1},\mu_{ir_2})\leftrightarrow(\mu_{is_1},{is_2})$ 的置换操作，则

gM_λ 中有 $g^{\mu_{ir_1}\mu_{ir_2}}$。去掉 ~~E M~~ 与 μ_{ir_1} 和 μ_{ir_2} 相关项后，

同样有 $\widetilde{M_{\lambda'}}\cdot\widetilde{F}=\widetilde{gM_\lambda\cdot F}$，且有更少张量指标，归纳成立。

c) $l_i\cdot l_j$ 是 $M_{\lambda'}\cdot F$ 中的一项，即 $M_{\lambda'}$ 与 M_λ 中分别有 $g^{\mu_{ir_1}\mu_{jr_2}}$ 和 $g^{\mu_{is_1}\mu_{js_2}}$。

令 $g=(\mu_{is_1},\mu_{js_2})\leftrightarrow(\mu_{ir_1},\mu_{jr_2})$，同上可证。

综上，定理得证。

• 推论：

$$T_\lambda\cdot F=N_\lambda M_\lambda\cdot F$$

且 $T_\lambda\cdot f=N_\lambda M_\lambda\cdot f$

• 由定理知，$R_\lambda\equiv M_\lambda\cdot F$ 唯一标定了 T_λ。$M_\lambda\cdot F$ 是以下量的单项式：

$$\underbrace{l_1^2,\ l_1\cdot l_2,\cdots,l_1\cdot l_L,\ l_1\cdot P_1,\cdots,l_1\cdot P_E}_{l_1}\ (\text{End}),\quad \underbrace{l_2^2,\ l_2\cdot l_3,\cdots,l_2\cdot P_E}_{l_2}\ (\text{End}),\ \cdots,\ \underbrace{l_L^2,\ l_L\cdot P_1,\cdots,l_L\cdot P_E}_{l_L}\ (\text{End})$$

记为：$s_1,\ s_2\ \cdots\cdots\ s_W$，$W=\frac{L(L+1)}{2}+LE$

即 $M_\lambda\cdot F=s_1^{v_1}\cdots s_W^{v_W}\equiv\vec{s}^{\,\vec{v}}$

其中 $\vec{s}\equiv(s_1,\cdots,s_W)$，$\vec{v}\equiv(v_1,\cdots,v_W)$

故 T_λ 可由 $\vec{v}$ 唯一标记。下面记为 $T_{\vec{v}}$，即

$$f_{\vec{v}}^{\mu_{11}\cdots\mu_{LP_L}}=\sum_{\vec{v}}a_{\vec{v}}T_{\vec{v}}^{\mu_{11}\cdots\mu_{LP_L}}$$

· 用递归算法找到所有 $\vec{v}$ ~~和对应 $N_{\vec{v}}$~~

定义递归函数 $Rec(\check{\beta}, \vec{v}, n)$：

若 $n > \frac{L(L+1)}{2} + LE$，记录允许的 $\vec{v}$.

else set $r_0 = 0$，对 s_n 分以下三种情况：

a) $s_n = l_i^2$： if $s_n \in \{End\}$, $r_0 = \lceil \frac{\beta_i}{2} \rceil$.

do: $r = r_0$ to $\lfloor \frac{\beta_i}{2} \rfloor$, $Rec(\check{\beta} - 2r\check{e}_i, \vec{v} + r\vec{e}_n, n+1)$.

b) $s_n = l_i \cdot l_j$： if $s_n \in \{End\}$, $r_0 = \beta_i$.

do: $r = r_0$ to $\min\{\beta_i, \beta_j\}$, $Rec(\check{\beta} - r\check{e}_i - r\check{e}_j, \vec{v} + r\vec{e}_n, n+1)$

c) $s_n = l_i \cdot p_j$： if $s_n \in \{End\}$, $r_0 = \beta_i$

do: $r = r_0$ to β_i, $Rec(\check{\beta} - r\check{e}_i, \vec{v} + r\vec{e}_n, n+1)$

运行 $Rec(\check{\beta}, \vec{0}, 1)$，可得所有 $\vec{v}$.

· 用递归算法计算 $N_{\vec{v}}$： $calc(L, \vec{v})$

if $\vec{v} = \vec{0}$, return 1

else: $r = v_n$ is the first (depending on ordering, may be last) nozero term.

a) $s_n = l_i^2$： $C_{\beta_i}^{2r} (2r-1)!! \times calc(L, \vec{v} - r\vec{e}_n)$

b) $s_n = l_i \cdot l_j$： $C_{\beta_i}^{r} C_{\beta_j}^{r} r! \times calc(L, \vec{v} - r\vec{e}_n)$

c) $s_n = l_i \cdot p_j$： $C_{\beta_i}^{r} \times calc(L, \vec{v} - r\vec{e}_n)$

IV. 指标缩并

- $T_{\vec v}\cdot f_{\vec\beta} = N_{\vec v}\int[d^D l_i]\,\vartheta\, M_{\vec v}\cdot T_{\vec\beta} = N_{\vec v}\int[\prod_i d^D l_i]\,\vartheta\, \vec{s}^{\vec v}$

- 为了计算 $T_{\vec v}\cdot T_{\vec v}$，我们需要以下三类收缩：

a) $p_{k\mu_{11}} T_{\vec v}^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}}$，b) $g_{\mu_{11}\mu_{12}} T_{\vec v}^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}}$，c) $g_{\mu_{11}\mu_{21}} T^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}}$

不失一般性，这里把重复指标取为了张量前的几个。

- a) 有如下分解：

$$T_{\vec v}^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}} = \sum_{i=1}^{E} p_i^{\mu_{11}}\, T_{\vec v-\vec e_{l_1 p_i}}^{\mu_{12}\cdots\mu_{L\beta_L}} + \sum_{i=2}^{\beta_1} g^{\mu_{11}\mu_{1i}}\, T_{\vec v-\vec e_{l_1^2}}^{\mu_{12}\cdots\hat\mu_{1i}\cdots\mu_{L\beta_L}} + \sum_{ij} g^{\mu_{11}\mu_{ij}}\, T_{\vec v-\vec e_{l_1 l_i}}^{\mu_{12}\cdots\hat\mu_{ij}\cdots\mu_{L\beta_L}}$$

原因如下。比如对于第一项，等式左边对除了μ_{11}外的$\beta-1$个指标有$S_{\beta_1-1}\times S_{\beta_2}\times\cdots\times S_{\beta_L}$的对称性，而等式右边在这一对称变换中，$p_i^{\mu_{11}}$是唯一的，故其系数必然有这一对称性，再由两边收缩$F^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}}$知其对应于$\vec v-\vec e_{l_1 p_i}$的对称张量，最后由于它中每个单项张量不重复，而对称张量唯一，故得到以上分解。

对于其它项，分析类似：比如$g^{\mu_{11}\mu_{ij}}$项，利用不含μ_{11},μ_{ij}的对称群分析可得。

由于 $P_{k\mu_{11}} T_{\vec v}^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}}$ 具有 $S_{\beta_1-1}\times S_{\beta_2}\times\cdots\times S_{\beta_L}$ 对称性，故有如下分解：

$$P_{k\mu_{11}} T_{\vec v}^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}} = \sum_{\vec v'} C_{\vec v'} T_{\vec v'}^{\mu_{12}\cdots\mu_{L\beta_L}}$$

$$R_{\vec v} = \vec s^{\,\vec v}$$

为了确定 $\vec v'$ 及 $C_{\vec v'}$，用 $F^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}}/l_1^{\mu_{11}}$ 与两边收缩，左边得：

$$\sum_{i=1}^{E} p_i\cdot p_k N_{\vec v-\vec e_{l_1\cdot p_i}} R_{\vec v-\vec e_{l_1\cdot p_i}} + \sum_{i=2}^{\beta_1} l_1\cdot p_k N_{\vec v-\vec e_{l_1^2}} R_{\vec v-\vec e_{l_1^2}} + \sum_{i,j} l_i\cdot p_k N_{\vec v-\vec e_{l_1\cdot l_i}} R_{\vec v-\vec e_{l_1\cdot l_i}}$$

$$= \sum_{i=1}^{E} p_i\cdot p_k N_{\vec v-\vec e_{l_1\cdot p_i}} R_{\vec v-\vec e_{l_1\cdot p_i}} + (\beta_1-1) N_{\vec v-\vec e_{l_1^2}} R_{\vec v-\vec e_{l_1^2}+\vec e_{l_1\cdot p_k}} + \sum_{i=2}^{L}\beta_i N_{\vec v-\vec e_{l_1\cdot l_i}} R_{\vec v-\vec e_{l_1\cdot l_i}+\vec e_{l_i\cdot p_k}}$$

而右边得：

$$\sum_{\vec v'} C_{\vec v'} N_{\vec v'} R_{\vec v'}$$

故有：

$$P_{k\mu_{11}} T_{\vec v}^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}} = \sum_{i=1}^{E} p_i\cdot p_k T_{\vec v-\vec e_{l_1\cdot p_i}} + \frac{(\beta_1-1) N_{\vec v-\vec e_{l_1^2}}}{N_{\vec v-\vec e_{l_1^2}+\vec e_{l_1\cdot p_k}}} T_{\vec v-\vec e_{l_1^2}+\vec e_{l_1\cdot p_k}}$$

$$+ \sum_{i=2}^{L} \frac{\beta_i N_{\vec v-\vec e_{l_1\cdot l_i}}}{N_{\vec v-\vec e_{l_1\cdot l_i}+\vec e_{l_i\cdot p_k}}} T_{\vec v-\vec e_{l_1\cdot l_i}+\vec e_{l_i\cdot p_k}}$$

注：如果取的是正交归一基（$p_i\cdot p_k=\delta_{ij}$，$p_i^\mu g_{\mu\nu}=0$）则

$$\boxed{P_{k\mu_{11}} T_{\vec v}^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}} = T_{\vec v-\vec e_{l_1\cdot p_k}}}$$

为了讨论简单，下面假设采用了这样的基

b) 有如下分解（假设已没有 p_i 的项，否则可用 a)）：

$$T_{\vec v}^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}} = g^{\mu_{11}\mu_{12}} T_{\vec v-\vec e_{l_1^2}}^{\mu_{13}\cdots\mu_{L\beta_L}} + \sum_{i,j=1}^{L} \sum_{\substack{r=1\\(i,r)\neq 11,12}}^{\beta_i} \sum_{\substack{s=1\\(j,s)\neq 11,12,ir}}^{\beta_j} g^{\mu_{11}\mu_{ir}} g^{\mu_{12}\mu_{js}} T_{\vec v-\vec e_{l_1\cdot l_i}-\vec e_{l_1\cdot l_j}}^{\mu_{13}\cdots\hat\mu_{ir}\cdots\hat\mu_{js}\cdots\mu_{L\beta_L}}$$

原因与前面相同。由于

$$g_{\mu_{11}\mu_{12}} T_{\vec v}^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}} = \sum_{\vec v'} C_{\vec v'} T_{\vec v'}^{\mu_{13}\cdots\mu_{L\beta_L}}$$

两边用 $F^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}}/l_1^{\mu_{11}} l_1^{\mu_{12}}$ 收缩，得左边为：

$$D\, N_{\vec v-\vec e_{l_1^2}} \vec S^{\vec v-\vec e_{l_1^2}} + \sum_{i,j,r,s} l_i\cdot l_j\, N_{\vec v-\vec e_{l_1\cdot l_i}-\vec e_{l_1\cdot l_j}} \vec S^{\vec v-\vec e_{l_1\cdot l_i}-\vec e_{l_1\cdot l_j}}$$

$$= D\, N_{\vec v-\vec e_{l_1^2}} \vec S^{\vec v-\vec e_{l_1^2}} + \sum_{i,j=1}^{L} C_{ij}^{11} N_{\vec v-\vec e_{l_1\cdot l_i}-\vec e_{l_1\cdot l_j}} \vec S^{\vec v-\vec e_{l_1\cdot l_i}-\vec e_{l_1\cdot l_j}+\vec e_{l_i\cdot l_j}}$$

因此：

$$g_{\mu_{11}\mu_{12}} T^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}} = D\, T_{\vec v-\vec e_{l_1^2}} + \sum_{i,j=1}^{L} C_{ij}^{11} \frac{N_{\vec v-\vec e_{l_1\cdot l_i}-\vec e_{l_1\cdot l_j}}}{N_{\vec v-\vec e_{l_1\cdot l_i}-\vec e_{l_1\cdot l_j}+\vec e_{l_i\cdot l_j}}} T^{\cdots}_{\vec v-\vec e_{l_1\cdot l_i}-\vec e_{l_1\cdot l_j}+\vec e_{l_i\cdot l_j}}$$

其中 $$C_{ij}^{aa} \equiv \sum_{\substack{r=1\\ ir\neq a1\\ a2}}^{\beta_i} \sum_{\substack{s=1\\ js\neq a1\\ a2\\ ir}}^{\beta_j} = \left(\beta_i - \mathrm{count}(\{a,a\},i)\right)\left(\beta_j - \mathrm{count}(\{a,a,i\},j)\right)$$

$\mathrm{count}(list, n) \equiv list$ 中 n 的数量

• c) 有如下分解（假设无 P_k 的项）：

$$T_{\vec{v}}^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}} = g^{\mu_{11}\mu_{21}}\, T_{\vec{v}-\vec{e}_{l_1\cdot l_2}}^{\mu_{12}\cdots\hat{\mu}_{21}\cdots\mu_{L\beta_L}} + \sum_{i,j=1}^{L}\ \sum_{\substack{r=1\\(ir)\neq 11,21}}^{\beta_i}\ \sum_{\substack{s=1\\(js)\neq 11,21,ir}}^{\beta_j} g^{\mu_{11}\mu_{ir}} g^{\mu_{21}\mu_{js}}\, T_{\vec{v}-\vec{e}_{l_1\cdot l_i}-\vec{e}_{l_1\cdot l_j}}^{\mu_{12}\cdots\hat{\mu}_{ir}\cdots\hat{\mu}_{21}\cdots\hat{l}_{js}\cdots\mu_{L\beta_L}}$$

令

$$g_{\mu_{11}\mu_{21}} T_{\vec{v}}^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}} = \sum_{\vec{v}'} C_{\vec{v}'}\, T_{\vec{v}'}^{\mu_{12}\cdots\hat{\mu}_{21}\cdots\mu_{L\beta_L}}$$

两边用 $F_{\vec{\beta}}^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}} / l_1^{\mu_{11}} l_2^{\mu_{21}}$ 收缩得左边：

$$D N_{\vec{v}-\vec{e}_{l_1\cdot l_2}} R_{\vec{v}-\vec{e}_{l_1\cdot l_2}} + \sum_{ijrs} l_i\cdot l_j\, N_{\vec{v}-\vec{e}_{l_1\cdot l_i}-\vec{e}_{l_2\cdot l_j}} R_{\vec{v}-\vec{e}_{l_1\cdot l_i}-\vec{e}_{l_2\cdot l_j}}$$

$\Longrightarrow$

$$g_{\mu_{11}\mu_{21}} T_{\vec{v}}^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}} = D\, T_{\vec{v}-\vec{e}_{l_1\cdot l_2}} + \sum_{i=1,j=1}^{L} C_{ij}^{12}\, \frac{N_{\vec{v}-\vec{e}_{l_1\cdot l_i}-\vec{e}_{l_2\cdot l_j}}}{N_{\vec{v}-\vec{e}_{l_1\cdot l_i}-\vec{e}_{l_2\cdot l_j}+\vec{e}_{l_i\cdot l_j}}}\, T_{\vec{v}-\vec{e}_{l_1\cdot l_i}-\vec{e}_{l_2\cdot l_j}+\vec{e}_{l_i\cdot l_j}}$$

其中：$C_{ij}^{12} = \sum\limits_{\substack{r=1\\(ir)\neq 11,21}}^{\beta_i}\ \sum\limits_{\substack{s=1\\(js)\neq 11,21,ir}}^{\beta_j}$

~~11 : $(\beta_1-1)(\beta_1-2)$ 22 : $(\beta_2-1)(\beta_2-2)$ $ii\neq 11,22$: $\beta_i(\beta_i-1)$~~

$1i\ (i\neq 1,2)$: $(\beta_1-1)\beta_i$ 2i : $(\beta_2-1)\beta_i$, ~~12 : $(\beta_1-1)(\beta_2-1)$~~ , 21 : $(\beta_1-1)(\beta_2-1)$

~~i1 : $(\beta_1-1)\beta_i$ i2 : $(\beta_2-1)\beta_i$~~

$$\Rightarrow C_{ij}^{ab} = \left(\beta_i - \mathrm{count}(\{a,b\}, i)\right)\left(\beta_j - \mathrm{count}(\{a,b,i\}, j)\right)$$

• $T_{\vec{v}'} \cdot T_{\vec{v}}$

① 有 $p_k^{\mu_{i1}}$：$\left(p_k^{\mu_{i1}} T_{\vec{v}'-\vec{e}_{p_k \cdot l_i}}^{\mu_{11}\cdots\hat{\mu}_{i1}\cdots\mu_{L\beta_L}}\right) \cdot T_{\vec{v}}^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}} \dfrac{N_{\vec{v}'}}{N_{\vec{v}'-\vec{e}_{p_k \cdot l_i}}}$

$$= \frac{N_{\vec{v}'}}{N_{\vec{v}'-\vec{e}_{l_i \cdot p_k}}} T_{\vec{v}'-\vec{e}_{l_i \cdot p_k}} \cdot T_{\vec{v}-\vec{e}_{l_i \cdot p_k}}$$

② 无 p_k，有 $g^{\mu_{11}\mu_{12}}$：

$$\frac{N_{\vec{v}'}}{N_{\vec{v}'-\vec{e}_{l_1^2}}} \left(g^{\mu_{11}\mu_{12}} T_{\vec{v}'-\vec{e}_{l_1^2}}^{\mu_{13}\cdots\mu_{L\beta_L}}\right) \cdot T_{\vec{v}}^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}}$$

$$= D \frac{N_{\vec{v}'}}{N_{\vec{v}'-\vec{e}_{l_1^2}}} T_{\vec{v}'-\vec{e}_{l_1^2}} \cdot T_{\vec{v}-\vec{e}_{l_1^2}} + \sum_{i=1,j\neq 1}^{L} c_{ij}^{11} \frac{N_{\vec{v}'} N_{\vec{v}-\vec{e}_{l_1 \cdot l_i}-\vec{e}_{l_1 \cdot l_j}}}{N_{\vec{v}'-\vec{e}_{l_1^2}} N_{\vec{v}-\vec{e}_{l_1 \cdot l_i}-\vec{e}_{l_1 \cdot l_j}+\vec{e}_{l_i \cdot l_j}}} \times$$

$$\times T_{\vec{v}'-\vec{e}_{l_1^2}} \cdot T_{\vec{v}-\vec{e}_{l_1 \cdot l_i}-\vec{e}_{l_1 \cdot l_j}+\vec{e}_{l_i \cdot l_j}}$$

③ 无 p_k，无 $g^{\mu_{11}\mu_{12}}$，有 $g^{\mu_{11}\mu_{k1}}$：（$k \neq 1, 2$）

$$\frac{N_{\vec{v}'}}{N_{\vec{v}'-\vec{e}_{l_1 \cdot l_k}}} \left(g^{\mu_{11}\mu_{k1}} T_{\vec{v}'-\vec{e}_{l_1 \cdot l_k}}^{\mu_{12}\cdots\hat{\mu}_{k1}\cdots\mu_{L\beta_L}}\right) \cdot T_{\vec{v}}^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}}$$

$$= D\frac{N_{\vec{v}'}}{N_{\vec{v}'-\vec{e}_{l_1\cdot l_k}}} T_{\vec{v}'-\vec{e}_{l_1\cdot l_k}} \cdot T_{\vec{v}-\vec{e}_{l_1\cdot l_k}} + \sum_{i=1,j=1}^{L} \epsilon_{ij}^{/2} \frac{N_{\vec{v}'} N_{\vec{v}-\vec{e}_{l_1\cdot l_i}-\vec{e}_{l_k\cdot l_j}}}{N_{\vec{v}'-\vec{e}_{l_1\cdot l_k}} N_{\vec{v}-\vec{e}_{l_1\cdot l_i}-\vec{e}_{l_k\cdot l_j}+\vec{e}_{l_i\cdot l_j}}}$$

$$\times T_{\vec{v}'-\vec{e}_{l_1\cdot l_k}} \cdot T_{\vec{v}'-\vec{e}_{l_1\cdot l_i}-\vec{e}_{l_k\cdot l_j}+\vec{e}_{l_i\cdot l_j}}$$

- 最后，我们可能想计算：$f_{\vec{\beta}}^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}} \quad Q_{\vec{x}\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}}$

其中 $Q_{\vec{x}}^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}}$ 是 $q_1^\mu, \cdots, q_K^\mu$ 构成的多单项张量，

q_i^μ 是与外动量 P_j^μ 无关的动量。为此需要计算

$$Q_{\vec{x}} T_{\vec{v}}$$

由于 $T_{\vec{v}}^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}}$ 在G作用下不变，可以用 $Q_{\vec{x}}\cdot T_{\vec{\beta}}$ 来标记：
（结果不依赖于 $\mu_{11}\cdots\mu_{l\beta_l}$ 的具体顺序）

$l_1\cdot q_1, \cdots, l_1\cdot q_K, l_2\cdot q_1, \cdots, l_2\cdot q_K, \cdots, l_L\cdot q_1, \cdots, l_L\cdot q_K$

记为：$t_{11}, \cdots, t_{LK}$

$$Q_{\vec{x}}\cdot T_{\vec{\beta}} = \prod_{i,j=1}^{LK} t_{ij}^{x_{ij}}$$

有 $\sum_{i,j=1}^{LK} x_{ij} = \beta$

$\sum_{j=1}^{K} x_{ij} = \beta_i$，~~$\sum_{i=1} x_i = \beta$~~

由⑪页中的分解，可得 [注：$Q_{\vec{x}}^{\mu_{11}\cdots\mu_{L\beta_L}} = q_r^{\mu_{11}} Q_{\vec{x}-e_{l_1\cdot q_r}}^{\mu_{12}\cdots\mu_{L\beta_L}}$]

~~$Q_{\vec{x}}\cdot T_{\vec{v}} =$~~

$$Q_{\vec{K}}\cdot T_{\vec{v}} = \sum_{i=1}^{E} \hat{p}_i\cdot q_r \, Q_{\vec{K}-\vec{e}_{l_1\cdot q_r}} \cdot T_{\vec{v}-\vec{e}_{l_1\cdot p_i}}$$

$$+\sum_{j=1}^{K} \hat{q}_r\cdot\hat{q}_j \left(x_{1j}-\delta_{rj}\right) Q_{\vec{K}-\vec{e}_{l_1\cdot q_r}-\vec{e}_{l_1\cdot q_j}} \cdot T_{\vec{v}-\vec{e}_{l_1^2}}$$

$$+\sum_{i\neq 1}^{L}\sum_{j=1}^{K} \hat{q}_r\cdot\hat{q}_j \, x_{ij} \, Q_{\vec{K}-\vec{e}_{l_1\cdot q_r}-\vec{e}_{l_i\cdot q_j}} \cdot T_{\vec{v}-\vec{e}_{l_1\cdot l_i}}$$

边界为 $\vec{v}=\vec{0}$ 时 $Q_{\vec{K}}\cdot T_{\vec{v}} = 1$.

其中 $\hat{q}_i\cdot\hat{q}_j \equiv q_i^{\mu}\hat{g}_{\mu\nu}q_j^{\nu} = q_i\cdot q_j - \sum_r q_i\cdot\hat{p}_r \, \hat{p}_r\cdot q_j$

注：前面所有标量积（如 $l_i\cdot l_j \to \hat{l}_i\cdot\hat{l}_j$）
应理解为在垂直时空
中的标量积。