Feynman积分介绍

马滟青 2023.04.11

1. 积分family

$$J(\vec{\nu}) = \int \left(\prod_{i=1}^{L} \frac{d^D l_i}{i\pi^{D/2}}\right) \frac{D_{K+1}^{-\nu_{K+1}} \cdots D_N^{-\nu_N}}{D_1^{\nu_1} \cdots D_K^{\nu_K}}$$

其中 $\begin{cases} \nu_1, \cdots, \nu_K \in \mathbb{N} \\ -\nu_{K+1}, \cdots, -\nu_N \in \mathbb{Z} \end{cases}$

· $D_i = \sum_{j,k=1}^{L} a_{ijk}\, l_j \cdot l_k + \sum_{j,k=1}^{L,E} b_{ijk}\, l_j \cdot p_k + C_i + i0^+$, $i=1,\cdots,L$

p_j 为外动量，$j=1,\cdots,E$

a_{ijk}, b_{ijk} 为无量纲的系数，C_i 为不依赖圈动量的量纲为2的量。

$N = \frac{1}{2}L(L+1) + LE$ 是与圈动量相关的Lorentz不变量的数目

$\frac{1}{2}L(L+1) \downarrow l_i \cdot l_j$，$LE \downarrow l_i \cdot p_j$

· 给定 $D_1,\cdots,D_K$ 时，$D_{K+1},\cdots,D_N$ 的选择有自由度，

不同选择对应的积分之间由线性变换关联

$D_{K+1},\cdots,D_N$: 不可约标量积 (irreducible scalar products, ISPs)

为了使 $\{D_i\}$ 构成能线性表示 $l_i \cdot l_j$, $l_i \cdot p_j$ 的完备基。

②

给定 $D_1,\cdots,D_k$ 时（再选择一组完备的 $D_{k+1},\cdots,D_N$），

所有允许的 $\vec{\nu}$ 构成的积分集合 $\{J(\vec{\nu})\}$ 称为一个积分 family.

- Sector

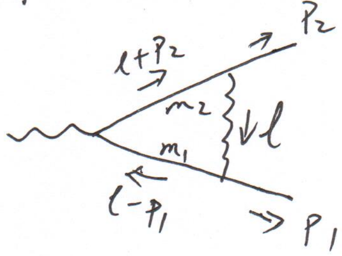
$\nu_{i_1},\cdots,\nu_{i_m}\geq 1$ $(i_j\leq k)$，其余 $\nu_i\leq 0$ 对应的积分集合，

被称为 $\{i_1,\cdots,i_m\}$ sector 的积分。

每个 sector 有个标志性的积分（corner 积分）：$\nu_{i_1}=\cdots=\nu_{i_m}=1$.

$\nu_1=\cdots=\nu_k=1$ 对应 top sector 的 corner 积分，

- E.g.: 单圈



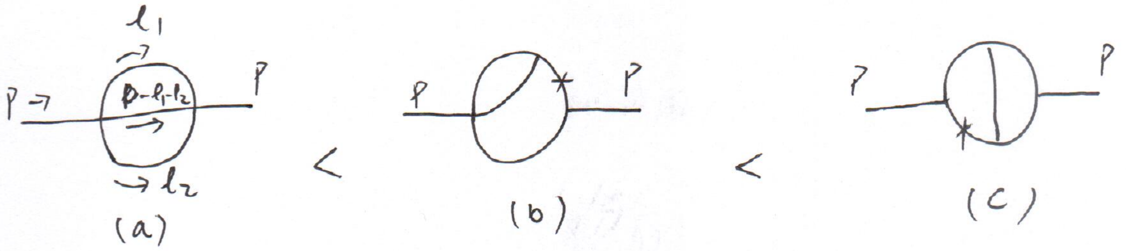
$$J(\vec{\nu})=\int\frac{d^Dl}{i\pi^{D/2}}\,\frac{1}{D_1^{\nu_1}D_2^{\nu_2}D_3^{\nu_3}}$$

$$\begin{cases} D_1=l^2+i0^+ \\ D_2=(l-p_1)^2-m_1^2+i0^+ \\ D_3=(l+p_2)^2-m_2^2+i0^+ \end{cases}$$

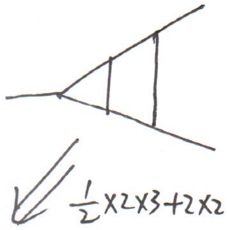
变量：$\underbrace{l^2,\ l\cdot p_1,\ l\cdot p_2}$ $\Rightarrow$ #ISPs $=0$

$\Rightarrow$ 单圈传播子完备 $\Rightarrow$ 计算容易

· E.g.：两圈传播子积分



5个变量：$l_1^2,\ l_1\cdot l_2,\ l_2^2,\ l_1\cdot p,\ l_2\cdot p$



$\frac{1}{2}\times2\times3+2\times2=7>6$

(a)：3个传播子

(b)：4个传播子 $\Rightarrow$ 多圈传播子不完备

(c)：5个传播子

$\Downarrow$

计算困难

2. 参数化表示

· Feynman参数化表示：

$[dl]\equiv\prod_{i=1}^{L}\frac{d^D l_i}{i\pi^{D/2}}$

$n\le N$，即有些幂次取0了

$$J(\vec{\nu})=\int[dl]\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{D_i^{\nu_i}}$$

$$=\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu_1)\cdots\Gamma(\nu_n)}\int_0^1\prod_{i=1}^{n}dx_i\,\delta\left(1-\sum x_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{\nu_i-1}\right)$$

$$\times\int[dl]\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_iD_i\right)^{\nu}}$$

$$\nu\equiv\sum_{i=1}^{n}\nu_i$$

·注：某个 $\nu_i \le 0$，则对 $\frac{1}{x_i^{1-\nu_i}}$ 积分时，定义为取 $x_i=0$ 的留数

E.g.：
$$\frac{1}{a} = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{a^1 b^\delta} = \lim_{\delta\to 0}\frac{\Gamma(1+\delta)}{\Gamma(1)\Gamma(\delta)}\int_0^1 dx_1\,dx_2\,\delta(1-x_1-x_2)\,x_2^{\delta-1}\frac{1}{(x_1 a + x_2 b)^{1+\delta}}$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\delta\int_0^1 dx_2\, x_2^{\delta-1}\frac{1}{((1-x_2)a + x_2 b)^{1+\delta}}$$

否则无贡献

$$\overset{x_2\to 0}{=} \lim_{\delta\to 0}\delta\underbrace{\int_0^1 dx_2\, x_2^{\delta-1}}_{=\frac{1}{\delta}}\frac{1}{a^{1+\delta}}$$

$$= \frac{1}{a}$$

·令 $\sum_{i=1}^{n} x_i D_i = \vec{l}_\mu^{\,T}\cdot A\cdot \vec{l}^{\,\mu} - 2\,\vec{l}_\mu^{\,T}\cdot \vec{b}^{\,\mu} + C$

其中 $\vec{l}^{\,\mu} \equiv \begin{pmatrix} l_1^\mu \\ \vdots \\ l_L^\mu \end{pmatrix}$，A 总可取为对称矩阵：$A^T = A$

故可做分解：$A = V^T\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_L\end{pmatrix}V$，其中 $\|V\| = 1$

令 $\vec{l}'_\mu = V\cdot(\vec{l}_\mu - A^{-1}\cdot\vec{b}_\mu)$，则有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i D_i = \sum_{i=1}^{L}\lambda_i l_i'^2 - \underbrace{\left[\vec{b}_\mu^{\,T}\cdot A^{-1}\cdot\vec{b}^{\,\mu} - C\right]}_{\equiv F/U}\qquad U \equiv \|A\| = \prod_{i=1}^{L}\lambda_i$$

$$\Rightarrow \int[dl]\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i D_i\right)^\nu} = \int[dl']\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{L}\lambda_i l_i'^2 - F/U\right)^\nu}$$

$$= \left(\frac{F}{U}\right)^{\frac{LD}{2}-\nu}U^{-\frac{D}{2}}\int[dl]\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{L} l_i^2 - 1\right)^\nu}$$

$$= \left(\frac{F}{U}\right)^{\frac{LD}{2}-V} U^{-\frac{D}{2}} (-1)^V \underbrace{\int \left(\prod_{i=1}^{L} \frac{d^D l_i^E}{\pi^{D/2}}\right) \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{L} l_i^{E^2}+1\right)^V}}_{=\frac{\Gamma(V-\frac{LD}{2})}{\Gamma(V)}}$$

$\Longrightarrow$

$$J(D) = \frac{\Gamma(V-\frac{LD}{2})}{\Gamma(V_1)\cdots\Gamma(V_n)} (-1)^V \int_0^1 \left(\prod_{i=1}^{n} dx_i\, x_i^{V_i-1}\right) \delta\left(1-\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \frac{U^{V-\frac{(L+1)D}{2}}}{F^{V-\frac{LD}{2}}}$$

U：为x_i的L次齐次多项式，1-tree cut

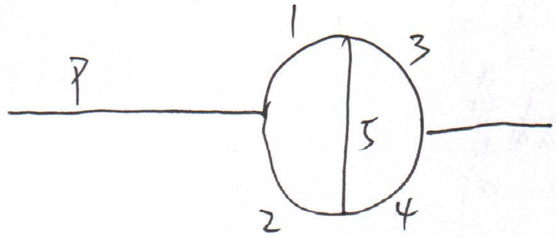
F：为x_i的$L+1$次齐次多项式，$F = F_0 + U\sum_{i=1}^{n} x_i m_i^2$，$F_0$: 2-tree cut

1-tree cut：求和所有把Feynman图切L个传播子，成为树图的切法，每种切法的贡献为对应被切断传播子的x_i的乘积。

2-tre cut：求和所有把图切$L+1$个传播子，成为两个树图的切法，每种切法贡献为被切断传播子的x_i乘积再乘以$-P^2$，其中P为切断的两个树图间的总动量。

U，F：Symanzik 多项式.

E.g.:



$p^2 = s$

$x_{abc\ldots} \equiv x_a + x_b + x_c + \cdots$

$$U = x_{12}x_{34} + x_{1234}x_5 ,$$

$$F = -s\left(x_1x_2x_{345} + x_{125}x_3x_4 + x_1x_4x_5 + x_2x_3x_5\right)$$

基于Feynman参数表示，可以进行解析计算(对简单情况)，也可以进行数值计算。

数值计算需要处理紫外、红外发散等问题，为此可把积分分为多个区域(sector)使每个sector的发散可以简单地减除掉，然后对有限部分进行Monte Carlo积分。这即为sector Decomposition方法。

代表程序有：SecDec，pySecDec，FIESTA.

优点：够系统化

缺点：sector太多，不同贡献有时会相消，问题复杂后很难得到合理的精度要求

- Lee-Pomeransky 表示 (1308.6676)

由

$$\frac{U^{V-\frac{(L+1)D}{2}}}{F^{V-\frac{LD}{2}}} = \frac{\Gamma(\frac{D}{2})}{\Gamma(V-\frac{LD}{2})\Gamma(\frac{(L+1)D}{2}-V)}\int_0^\infty dr\,\frac{r^{V-1-\frac{LD}{2}}}{(U+rF)^{\frac{D}{2}}}$$

令 $x_i \to x_i/r$, 积掉 r 得

$$J(\vec{v}) = \frac{\Gamma(D/2)\,(-1)^V}{\Gamma(v_1)\cdots\Gamma(v_n)\,\Gamma(\frac{(L+1)}{2}D-V)}\int_0^\infty\left(\prod_{i=1}^n dx_i\,x_i^{v_i-1}\right)G^{-\frac{D}{2}}$$

$$G \equiv U+F$$

- Zero sector (1310.1145)

无标度积分 $\overset{DR}{=}$ 0

E.g.: $\int_0^\infty \frac{dx}{x^a} = 0$, $\int \frac{d^D l}{l^2(l+p)^2} \overset{p^2=0}{=} 0$

$\Uparrow$

$x \to \lambda x$

一般情况如何确定是否为无标度积分?

显然,一个积分sector为zero sector当且仅当其corner积分为无标度积分。

令：$x_i \to x_i' = (1+k_i\lambda)x_i$，

λ为无穷小常量
k_i为有限常量
不依赖于维数 D.

假设存在$\{k_i\}$使得：$G(x') = (1+\lambda)G(x)$ …… (*)

则对于 corner 积分得：

$$J(\vec{v}) = \left\|\frac{\partial x_i'}{\partial x}\right\|(1+\lambda)^{-\frac{D}{2}} J(\vec{v})$$

$$= \left(1+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} k_i - \frac{D}{2}\right)\right) J(\vec{v})$$

由于k_i不依赖于D，故

$\Rightarrow J(\vec{v}) = 0$

(*)式等价于（求λ的一阶导数）：

$$\sum_{i=1}^{n} k_i x_i \frac{\partial G(x)}{\partial x_i} = G(x) \quad \cdots \quad (**)$$

条件：若(**)式中$\{k_i\}$有不依赖于维数的解，则

$J(\vec{v}) = 0$

3. 分部积分（IBP）与主积分（master integrals, MIs）

- 每个family有无穷多积分，利用IBP可建立它们之间的线性关系，从而减少待求的积分数量。

Chetyrkin, Tkachov, NPB (1981):

$$\int [dl] \frac{\partial}{\partial l_i^\mu}\left[q_j^\mu \frac{D_{K+1}^{-\nu_{K+1}} \cdots D_N^{-\nu_N}}{D_1^{\nu_1} \cdots D_K^{\nu_K}} \right], \quad q_j^\mu = \{ l_i^\mu, p_i^\mu \}$$

$$= \oint_{l_i^\mu \sim R} \underbrace{[d^{D-1} l_i]}_{\sim R^{D-1}} \underbrace{[\quad\quad]}_{\sim R^n} = 0$$

$$\lim_{R\to\infty} R^{D-1} \cdot R^n \xlongequal{n\text{为定值}} 0$$

由此，把导数计算出来整理可得：

$$0 = \sum_{i=1}^{\cdots} c_i J_i$$

为同一个family中积分间的线性关系。

· 90s：Laporta 发现，对于给定

$$d = \underbrace{\nu_{i_1} + \cdots + \nu_{i_m}}_{\text{均正}}, \quad r = -(\underbrace{\nu_{i_{m+1}} + \cdots + \nu_{i_N}}_{\text{非正}})$$

共有 $N_{d,r} = C_{d-1}^{m-1} \, C_{r+N-m-1}^{N-m-1}$ 个积分，

由这些积分做为"种子"，可生成的 IBPs 有

$L(L+E) N_{d,r}$ 个，而这些 IBPs 中包含的更复杂

的积分（d 更大或 r 更大）为 $N_{d+1,r} + N_{d+1,r+1}$ 个。

考虑到 $N_{d,r}$ 是 d 和 r 的有限阶多项式，当 d, r 足够大

时有：$N_{d+1,r} + N_{d+1,r+1} \approx 2 N_{d,r} < L(L+E) N_{d,r}$

即：IBP 方程数的增长速度快于未知积分数！

$\Downarrow$

· 猜想：给定 family，所有积分构成有限维线性空间，

即只有有限多个未知积分（称为主积分）

$$J(\vec{\nu}) = \sum_{i=1}^{\# MIs} C_i(\vec{\nu}) \, I_i$$

$C_i(\vec{\nu})$ → 有理式

I_i → 主积分，为特定选取的 $J(\vec{\nu})$

证明：Smirnov, Petukhov, 1004.4199

- Laporta 算法 (0102033):

  系统、自动化地把各种 IBPs 组合，得到能把任意积分用 MIs 表示的线性系统。

基于此有大量的程序实现：

AIR, FIRE, LiteRed, Reduze, Kira, Blade, ...

现代圈图计算的重要工具。